

# Examen de statistiques

Jeudi 5 juin 2025

Promotion 114

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) :  Oui  Non

Calculatrice autorisée :  Oui  Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

## Exercice 1 Test de $\chi^2$

Un vétérinaire souhaite savoir combien de doses de vaccin il doit tenir en stock. Il relève donc les injections de ce vaccin sur les 100 derniers jours, supposés représentatifs. Il note  $X$  la variable qui donne le nombre d'injections de doses de vaccin faites par jour. Ses notes sont regroupées dans le tableau ci-dessous

|                  |    |    |    |    |   |   |   |
|------------------|----|----|----|----|---|---|---|
| $X$              | 0  | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 |
| Effectif (jours) | 14 | 27 | 26 | 18 | 9 | 4 | 2 |

Pour clarifier ce tableau, la 5eme colonne indique que le vétérinaire a injecté 3 vaccins sur une journée à 18 reprises sur les 100 derniers jours.

L'objectif est d'aider le vétérinaire à savoir si les injections de vaccin sont distribuées selon une loi de Poisson.

On donne la loi de probabilité de Poisson,

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

où  $\lambda$  est le nombre moyen d'injections de vaccin réalisé sur les 100 derniers jours.

1. Ecrire les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ .
2. Calculer le nombre moyen  $\lambda$  d'injections de vaccin réalisé sur les 100 derniers jours.
3. Déterminer les effectifs théoriques.
4. Calculer  $\chi_{obs}^2$ .
5. Calculer le nombre de degré de liberté  $\nu$ .
6. Avec l'aide de la table  $\chi^2$ , déterminer  $\chi_{seuil}^2$  au risque  $\alpha = 2\%$ .
7. Conclure sur le test et donner une interprétation.

### Exercice 2 Test de $\chi^2$

Afin de comparer l'action de deux levures sur une pâte à gâteaux, on prélève, pour chacune des levures, un échantillon aléatoire de gâteaux. L'aptitude des pâtes à lever est définie par les critères suivants : moyenne, bonne, très bonne.

Les résultats constatés sont rassemblés dans le tableau suivant :

| aptitude à lever | moyenne | bonne | très bonne |
|------------------|---------|-------|------------|
| levure A         | 41      | 16    | 63         |
| levure B         | 22      | 27    | 51         |

A l'aide d'un test de  $\chi^2$ , au risque de 5%, peut-on conclure à une différence d'activité des deux levures? Vous détaillerez avec soin votre démarche.

### Exercice 3 ANOVA

On a planté des échalottes dans différents pots en laboratoire. La terre dans ces pots a été préparée avec 4 engrais différents (A, B, C et D). Au bout d'un temps identique on a mesuré le poids des échalottes récoltées (cf tableau ci-dessous).

La nature du sol dans lequel est planté l'échalote a-t-il un effet sur leur poids moyen ?

| A    | B    | C   | D    |
|------|------|-----|------|
| 9.5  | 8    | 7.5 | 14   |
| 11.5 | 6.5  | 5   | 11.5 |
| 9    | 10   | 6   | 12   |
| 12   | 7    | 5.5 | 11   |
| 11.5 | 11.5 | 8.5 | 13   |
| 10   | 9.5  | 6.5 | 15   |
| 11   | 10.5 | 9   |      |
|      | 10   |     |      |

1. Donner les conditions d'utilisation de l'analyse de la variance, et rappeler les tests qui permettent de les vérifier. On supposera dans la suite de l'exercice ces conditions satisfaites.
2. Ecrire les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ .
3. Construire le tableau afin de calculer  $F_{obs}$ .

| Variations      | Degrés de liberté | Variances estimées   | $F_{obs}$ |
|-----------------|-------------------|----------------------|-----------|
| $V_B$           | ...               | $\sigma_B^2 = \dots$ |           |
| $V_W$           | ...               | $\sigma_X^2 = \dots$ |           |
| $V = V_B + V_W$ | ...               |                      |           |

avec  $F_{obs}$  le rapport de  $\sigma_B^2$  avec  $\sigma_W^2$ .

4. Calculer  $F_{obs}$ .
5. Lire sur la table de Fisher la valeur de  $F_{seuil}$  au seuil  $\alpha = 0.05$ .
6. Donner la règle de décision et conclure sur le test.
7. Répondre à la question de l'énoncé.