Théorème des quantités de mouvement.

Si on prend l'hypothèse d'un volume de fluide incompressible qui évolue à vitesse constante

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \frac{d}{dt}\left(\rho\vec{V}\left(\iiint_\Omega d\tau\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\rho\vec{V}\,V_{\text{fluide}}\right) = \rho V_{\text{fluide}}\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

où γ est l'accélération du volume de fluide. En utilisant l'une des formes du théorème d'Ostrogradsky, le membre de droite de l'expression (10) devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint \rho\vec{V}\,d\tau\right) = \iiint \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}d\tau + \iint \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

En écoulement permanent, le terme

$$\iiint \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}d\tau = 0$$

et on obtient alors la forme générale du théorème des quantités de mouvement :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \iint \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS.$$

Théorème des quantités de mouvement.

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \iint \rho\,\vec{V}\,\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)dS$$

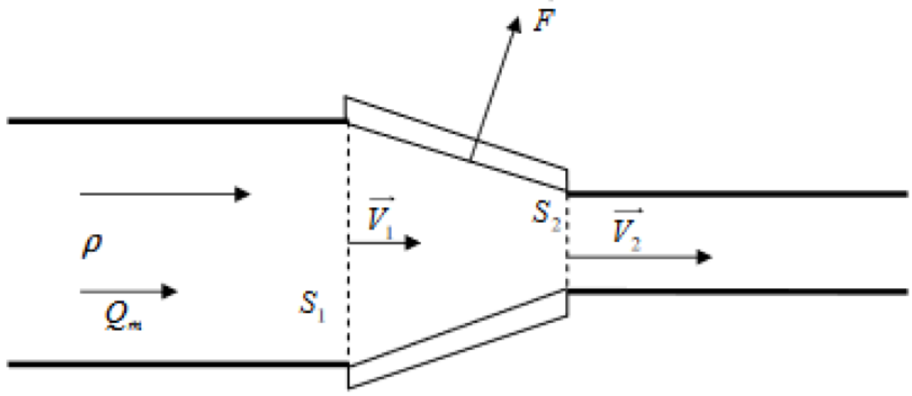
où

- $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$: forces extérieures de volume et de surface appliquées sur le domaine Ω
- S : frontière du domaine Ω
- $\vec{V}$: vitesse
- $\vec{n}$: normale sortante au domaine Ω

Ce résultat est intéressant car on n'a pas besoin de connaître $\vec{V}$ dans Ω mais seulement sur la frontière S du domaine Ω. La frontière S est choisie arbitrairement, il est souvent d'usage de considerer comme frontière un tube de courant.

Application : Calcul de la force qu'exerce l'eau en écoulement sur un « convergent » :

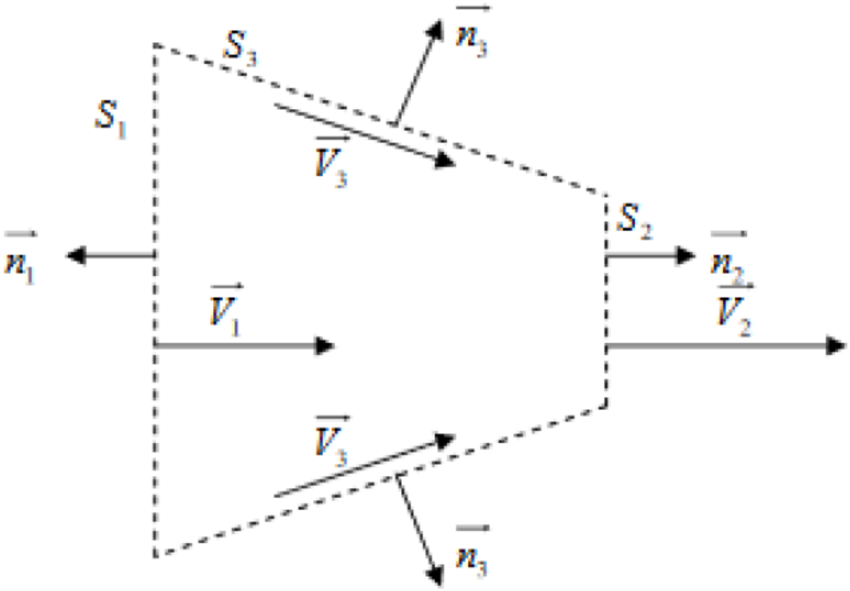
On cherche à déterminer l'effort $\vec{F}$ d'un jet d'eau sur un convergent. Le débit massique d'entrée est noté Q_m. Le fluide de masse volumique ρ est parfait, incompressible et l'écoulement est permanent. On note V_1 la vitesse du fluide dans la section d'entrée S_1 du convergent. De même, la vitesse est V_2 dans S_2. On néglige la gravité.



Pour calculer $\overrightarrow{F}$, on utilise le théorème des quantités de mouvement :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \iint \rho \overrightarrow{V} \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} \right) dS$$

On choisit le domaine de contrôle de contour S en indiquant les vitesses et les normales sortantes au volume.



- **Calcul du terme $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$ appliquées à S**

  La gravité étant négligée, il ne reste que les forces de pression appliquées à S :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \iint P(-\overrightarrow{n})dS$$

  Le signe « négatif » de la normale se justifie par le fait que ce sont les efforts exercés sur la surface S (vers l'intérieur) par les forces de pression.

  - Force de pression du fluide sur S_1 :
$$\overrightarrow{F_1} = \iint P_1 \left(-\overrightarrow{n_1}\right) dS_1$$
  - Force de pression du fluide sur S_2 :
$$\overrightarrow{F_2} = \iint P_2 \left(-\overrightarrow{n_2}\right) dS_2$$
  - Force de pression du convergent sur S_3 (principe d'action / réaction) :
$$\overrightarrow{F_3} = -\overrightarrow{F}$$

On peut alors écrire

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \iint P_1 \left(-\overrightarrow{n_1}\right) dS_1 + \iint P_2 \left(-\overrightarrow{n_2}\right) dS_2 - \overrightarrow{F}$$

Or $P_1 = P_2 = P_{atm}$ (écoulement parallèle et effet de pesanteur négligé). Ainsi

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = -P_{\text{atm}}\ S_1\ \overrightarrow{n_1} - P_{\text{atm}}\ S_2\ \overrightarrow{n_2} - \overrightarrow{F} = P_{\text{atm}}\ (S_2 - S_1)\,\overrightarrow{n_1} - \overrightarrow{F}$$

- **Calcul du terme** $\iint \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

$$\iint \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = \iint \rho\vec{V_1}\left(\vec{V_1}\cdot\vec{n_1}\right)dS_1 + \iint \rho\vec{V_2}\left(\vec{V_2}\cdot\vec{n_2}\right)dS_2 + \iint \rho\vec{V_3}\left(\vec{V_3}\cdot\vec{n_3}\right)dS_3$$

  - Sur S_1 on a $\vec{V_1}\cdot\vec{n_1} = -V_1$
  - Sur S_2 on a $\vec{V_2}\cdot\vec{n_2} = V_2$
  - Sur S_3 on a $\vec{V_3}\cdot\vec{n_3} = 0$

On a alors

$$\iint \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = -\iint \rho\vec{V_1}V_1dS_1 + \iint \rho\vec{V_2}V_2dS_2 = -\rho V_1S_1\vec{V_1} + \rho V_2S_2\vec{V_2}$$

D'après le principe de conservation de la masse :

$$\rho V_1S_1 = \rho V_2S_2 = Q_m$$

On a finalement :

$$\iint \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = Q_m\left(\vec{V_2} - \vec{V_1}\right)$$

- **Conclusion.**

  Finalement, le théorème des quantités de mouvement s'écrit :

$$P_{atm}(S_2 - S_1)\vec{n_1} - \vec{F} = Q_m\left(\vec{V_2} - \vec{V_1}\right)$$

  On en déduit l'effort exercé par l'eau sur le convergent :

$$\vec{F} = -Q_m\left(\vec{V_2} - \vec{V_1}\right) + P_{atm}(S_2 - S_1)\vec{n_1}$$

  Soit encore :

$$\vec{F} = \Big(Q_m(V_2 - V_1) + P_{atm}(S_2 - S_1)\Big)\vec{n_1}$$