Rappels sur **<u>l'équation de la statique des fluides</u>** :

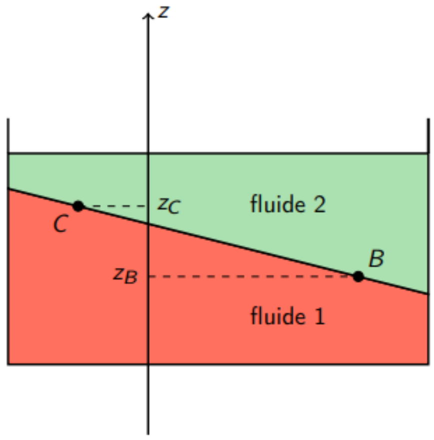
On écrit
$$p(z) = p_0 + \rho g h$$
où h est la hauteur de fluide sous le niveau de référence.

La plupart du temps, on prendra z_0 le niveau de référence correspondant à la surface libre du fluide où $p_0 = p_a$. Pour les application numériques, on prendra la pression atmosphérique standard $p_a = 1,013.10^5$ Pa.

Conséquences et interprétation de l'équation :

- Dans le repère défini d'axe $(O\overrightarrow{z})$ dirigé verticalement et orienté vers le haut, lorsque z augmente, la pression diminue.
- Les surfaces d'égale pression (ou isobares) dans un fluide homogène sont des plans horizontaux.
- La différence de pression entre deux points d'un même fluide ne dépend que de la distance verticale entre ces deux points. Si on écrit la relation
$$p(z) + \rho g z = \text{cste}$$
entre deux points, on obtient
$$p(z_1) + \rho g z_1 = p(z_2) + \rho g z_2.$$
d'où
$$p(z_1) - p(z_2) = -\rho g\,(z_1 - z_2)\,.$$
- La surface de séparation entre un liquide et un gaz ou entre deux liquides est une surface plane horizontale. Pour le démontrer, on peut considérer la figure suivante :

On suppose que la surface n'est pas horizontale et on démontre que c'est impossible.
Les points B et C appartiennent au fluide de masse volumique ρ_1. On peut donc écrire :
$$p_B - p_C = -\rho_1 g\,(z_B - z_C)\,.$$
Les points B et C appartiennent aussi au fluide de masse volumique ρ_2. On peut donc aussi écrire :
$$p_B - p_C = -\rho_2 g\,(z_B - z_C)\,.$$



On a donc
$$\rho_1 g\,(z_B - z_C) = \rho_2 g\,(z_B - z_C)$$
Comme $\rho_1 \neq \rho_2$, l'equation ci dessus est possible uniquement si
$$z_B = z_C.$$

Les variations de pression se transmettent intégralement au sein d'un fluide.

- Le théorème de Pascal :

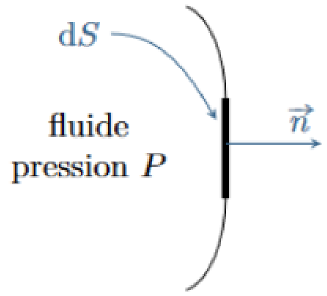
Théorème de Pascal

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraine la même variation de pression en tout autre point.

Calcul des forces de pression

Soit M un point d'un fluide à la pression P, entouré d'une surface élémentaire dS de normale extérieure $\vec{n}$. Le fluide exerce sur cette surface une force élémentaire de pression définie par :

$$d\vec{F} = PdS\vec{n}$$

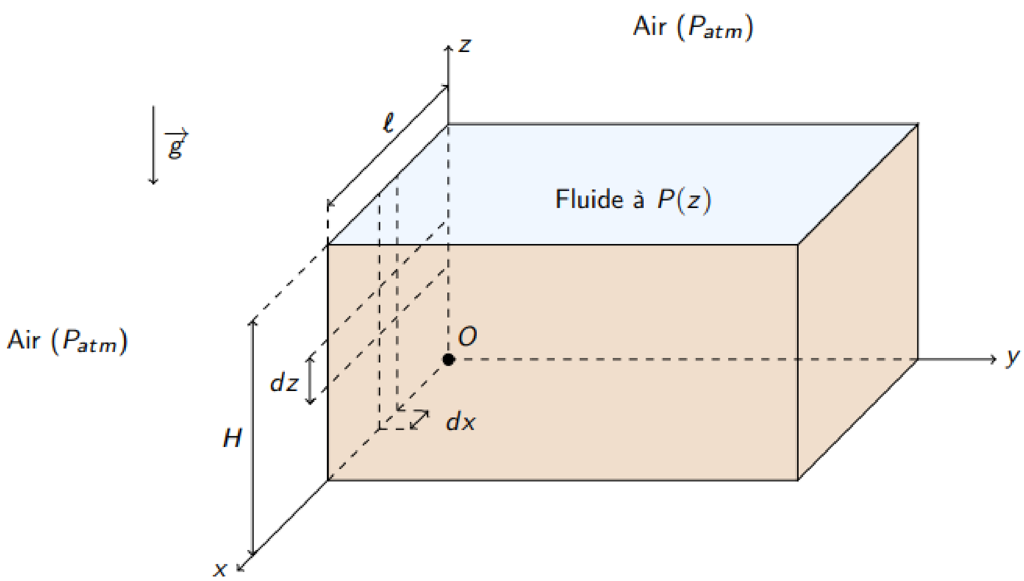


On cherche souvent à déterminer le torseur résultant en un point donné A de ces forces élémentaires s'appliquant à une surface S. Ce torseur est composé de deux vecteurs représentant, la force résultante, et le moment résultant au point A. On calculera généralement, l'intensité de la force résultante, sa direction, et son point d'application, appelé centre de poussée.

On étudie une surface plane verticale, coté d'un recipient rempli d'un fluide donné. On cherche à déterminer la resultante des forces de pression sur cette face, ainsi que le centre de poussée de cette resultante.

On commence par déterminer la pression. D'apres l'equation de la statique on peut écrire

$$P(z) + \rho g z = \text{ Constante .}$$



Or

$$P(H) = P_{atm}$$

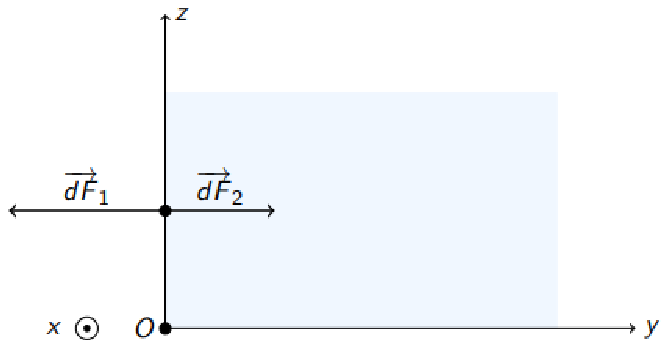
Donc

$$P_{atm} + \rho g H = \text{ Constante}$$

On en déduit

$$P(z) = P_{atm} + \rho g (H - z)$$

Nous pouvons à présent procéder à la détermination de la force s'exerçant sur la plaque. On note la force élémentaire $\vec{dF}$ s'exerçant sur un élément de surface élémentaire dS.



On note $\overrightarrow{dF_1}$ la force de pression exercée par le fluide dans le récipient sur la paroi, et $\overrightarrow{dF_2}$ la force de pression exercée par l'air sur la paroi. On peut alors écrire

$$d\overrightarrow{F} = \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = -\Big(P_{atm} + \rho g(H - z) - P_{atm}\Big) dS\ \overrightarrow{y} = -\rho g(H - z) dS\ \overrightarrow{y}$$

On a alors

$$d\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g(z - H)dS \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et donc on a

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \iint \rho g(z - H)dS \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous allons effectuer l'intégration des efforts élémentaires. On écrit

$$F_y = \iint \rho g(z - H)dS$$

avec

$$dS = dxdz$$

et le domaine d'intégration est défini par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \ell \\ 0 \leq z \leq H \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned} F_y &= \int_0^H \left(\int_0^\ell \rho g(z - H)dx \right) dz \\ &= \rho g \int_0^H \left(\int_0^\ell (z - H)dx \right) dz \\ &= \rho g \int_0^H [zx - Hx]_0^\ell \, dz \\ &= \rho g \ell \int_0^H (z - H)dz \\ &= \rho g \ell \left[\frac{z^2}{2} - Hz \right]_0^H \\ F_y &= -\rho g \ell \frac{H^2}{2} \end{aligned}$$

On obtient finalement

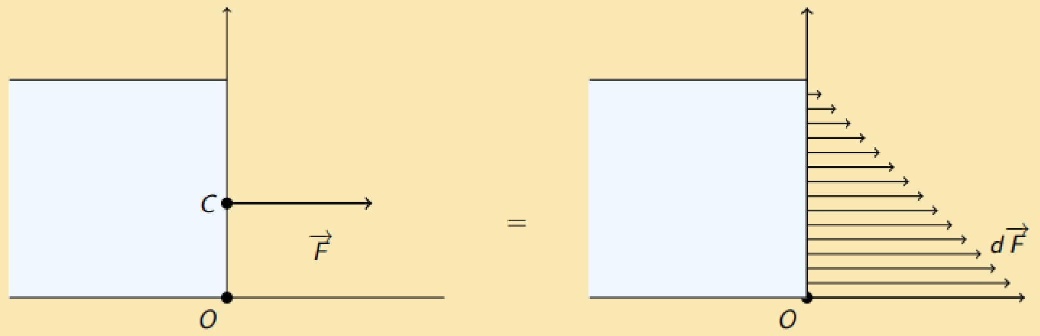
$$\overrightarrow{F} = -\rho g \ell \frac{H^2}{2} \overrightarrow{y} = -\rho g S \frac{H}{2} \overrightarrow{y}$$

Dans l'expression de F_y, ℓ et H sont des longueurs donc ℓH^2 est un volume et $\frac{1}{2}\rho g l H^2$ est homogène à un poids. On peut ainsi vérifier rapidement que le résultat est bien homogène à une force.

Centre de poussée.

Le centre de poussée est le point d'application des forces de pression. Pour déterminer ce centre de poussée, on écrit que le moment, par rapport à un point donné O, de la résultante appliquée au centre de poussée C est égal à la somme des moments élémentaires des forces élémentaires $d\overrightarrow{F}$ par rapport à ce même point :

$$\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F} = \iint \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F}$$



Dans notre exemple, si on choisit d'écrire le moment résultant en O, on a :

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De plus on sait que

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dF} = \begin{pmatrix} 0 \\ dF_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_C\ F_y \\ 0 \\ x_C\ F_y \end{pmatrix}$$

Et,

$$\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ dF_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z\ dF_y \\ 0 \\ x\ dF_y \end{pmatrix}$$

On obtient donc deux égalités scalaires :

$$z_c F_y = \iint z dF_y \quad \text{et} \quad x_c F_y = \iint x dF_y$$

De la première inégalité, on a :

$$\begin{aligned} z_C F_y &= \int_0^H \int_0^\ell \rho g (z - H) z dx dz \\ &= \int_0^H \rho g \ell \left(z^2 - Hz\right) dz \\ &= \left[\rho g \ell \left(\frac{z^3}{3} - H\frac{z^2}{2}\right)\right]_0^H \\ z_C F_y &= -\rho g \ell \frac{H^3}{6} \end{aligned}$$

or

$$F_y = -\rho g \ell \frac{H^2}{2}$$

On en déduit donc

$$z_C = \frac{H}{3}$$

De la seconde équation, on tire

$$
\begin{aligned}
x_C F_y &= \int_0^H \int_0^{\ell} \rho g (z-H) x dx dz \\
&= \int_0^H \rho g \frac{\ell^2}{2} (z-H) dz \\
&= \left[\rho g \frac{\ell^2}{2} \left(\frac{z^2}{2} - zH \right) \right]_0^H \\
x_C F_y &= \rho g \frac{\ell^2}{2} \left(-\frac{H^2}{2} \right)
\end{aligned}
$$

avec

$$F_y = -\rho g \ell \frac{H^2}{2}$$

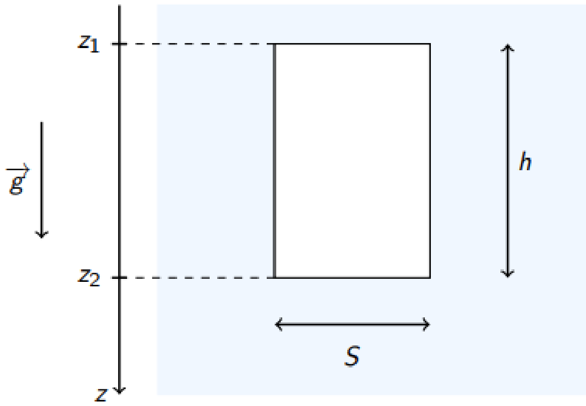
On en déduit alors

$$x_C = \frac{\ell}{2}$$

Ce résultat était bien sûr prévisible pour des raisons de symétrie. Le centre de poussée doit se trouver à la cote $x_C = \frac{l}{2}$.

Théorème d'Archimède

Nous allons considérer un cylindre de hateur h et de section S completement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_0.



Calculons la résultante des forces de pression. Ce calcul se décompose en trois, sur les deux faces planes (haut et bas) et sur la partie cylindrique. Par symétrie la résultante des forces de pression sur la partie cylindrique est nulle. On reprend le raisonnnement habituel. La loi de l'hydrostatique s'écrit

$$\rho \vec{g} = \overrightarrow{grad}(P)$$

donc dans le cas précis de la figure ci-dessus on a

$$P(z) = \rho g z + P_0$$

avec P_0 une constante donnée. On a alors

$$\vec{F}_{haut} = P(z_1) S \vec{z} = (\rho_0 g z_1 + P_0) S \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{bas} = -P(z_2) S \vec{z} = -(\rho_0 g z_2 + P_0) S \vec{z}$$

et finalement

$$\vec{F}_P = \vec{F}_{haut} + \vec{F}_{bas} = \rho_0 g (z_1 - z_2) S \vec{z} = -\rho_0 g h S \vec{z} = -\rho_0 g V \vec{z}$$

On voit apparaitre le volume $V = hS$.

Théorème d'Archimède

On appelle poussée d'Archimède la force exercée par un fluide au repos sur un corps totalement immergé. Cette force est en fait la résultante des forces de pression. La poussée d'Archimède subie par un système dont un volume V_{imm} est immergé dans un fluide est égale à l'opposée du poids d'un volume V_{imm} de ce fluide,

$$\overrightarrow{\Pi}_{\text{A}} = -\rho_{\text{fl}} V_{\text{imm}} \overrightarrow{g}$$

où ρ_{fl} est la masse volumique du fluide. Elle s'applique au centre de poussée, qui est le centre de masse du volume immergé.

Ce sont les variations de pression avec l'altitude qui expliquent la poussée d'Archimède. Si on suppose la pression uniforme autour du corps immergé, alors on a

$$\overrightarrow{\Pi}_A = \overrightarrow{0}.$$

La poussée d'Archimède est dirigée vers le haut car la pression est toujours plus importante sous l'objet qu'au dessus.

Lorsque le solide flotte à l'interface entre deux fluides, il subit une poussée d'Archimède de la part de chaque fluide, correspondant à la proportion de volume immergé dans chaque fluide. À l'interface entre un liquide et un gaz, la poussée d'Archimède exercée par le gaz est presque toujours négligeable (masse volumique très inférieure). Lorsque le solide est posé sur le fond du récipient, il n'est pas « totalement immergé » : sa face inférieure ne subit pas une force de pression mais une force de réaction exercée par le fond du récipient, qui est a priori inconnue. Le théorème d'Archimède est alors inutilisable et il faut calculer "à la main" la résultante des forces de pression.