

DYNAMIQUE DES FLUIDES

Le but de la dynamique des écoulements de fluide est l'analyse des forces qui, agissant sur un élément fluide, provoque son mouvement. On supposera ici que l'écoulement s'effectue sans frottement (fluide parfait) et qu'il est incompressible (masse volumique constante).

Nous allons nous attacher d'écrire les équations de conservation :

- Conservation de la masse (équation de continuité) ;
- Conservation de la quantité de mouvement (équivalent du PFD) ;
- Conservation de l'énergie (relation de Bernoulli).

Nous aurons également besoin de l'équation caractéristique du fluide étudié qui s'écrit :

$$f(P, \rho, T) = 0$$

D'autre part, nous aurons éventuellement besoin d'hypothèses concernant la nature de l'écoulement, les propriétés du fluide, les conditions aux limites . . .

Equation de continuité.

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse. Il s'agit donc d'une équation de bilan. Son approche globale se traduit par la conservation du débit massique ou volumique.

Définition.

Le débit en masse est la masse de fluide (qui a pour masse volumique ρ) traversant une surface donnée S pendant l'unité de temps.

Lorsqu'on considère un élément de surface dS , la masse de fluide dm de vitesse \vec{V} passant à travers dS par unité de temps est

$$dm = \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \rho V_n dS.$$

L'expression du **débit massique** est :

$$Q_m = \iint \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iint \rho V_n dS$$

ρ s'exprime en kg/m^3 , V_n en m/s , dS en m^2 et Q_m en kg/s .

L'expression du **débit volumique** est :

$$Q_v = \iint \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iint V_n dS$$

Conservation du débit :

On considère un tube de courant s'appuyant sur les sections droites élémentaires dS_1 et dS_2 (filet de courant), sur lesquelles les vitesses sont constantes et ont respectivement pour valeur V_1 et V_2 , vitesses normales aux éléments de surface.

Par définition, les vecteurs vitesse du fluide étant toujours tangents à la surface du tube de courant, il n'y a pas d'échange de matière à travers S . On a donc **conservation du débit massique élémentaire** :

$$dQ_{m_1} = dQ_{m_2}$$

Soit

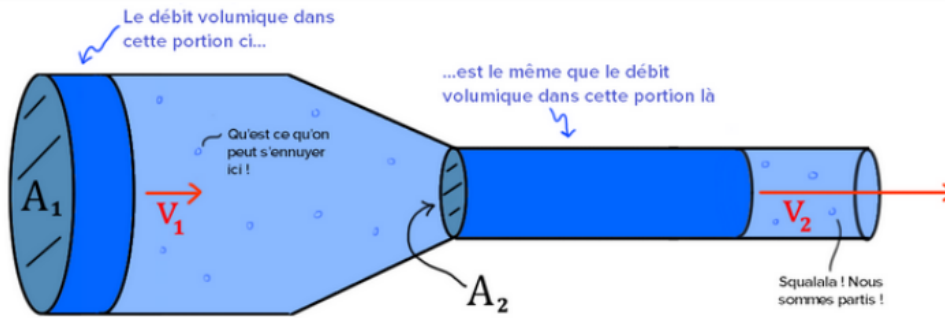
$$\rho v_1 dS_1 = \rho v_2 dS_2$$

C'est-à-dire

$$v_1 dS_1 = v_2 dS_2 = \text{Constante}$$

C'est la forme globale de l'équation de continuité. En régime stationnaire incompressible, le débit massique et le débit volumique restent constants à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant.

Exemple (Cas d'une conduite de section variable) :



On considère que tous les points d'une même section sont à la même vitesse normale (v_1 ou v_2).

$$Q_{m1} = \rho v_1 S_1$$

$$Q_{m2} = \rho v_2 S_2$$

Soit, d'après la conservation du débit :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

La vitesse moyenne est d'autant plus grande que la section est faible.

Relation de Bernoulli

Les hypothèses sont :

- Fluide parfait en écoulement permanent ;
- Champ de force volumique limité au champ de pesanteur ;
- Écoulement incompressible.

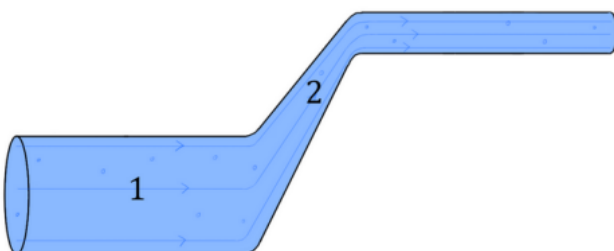
Théorème de Bernoulli.

Sur une ligne de courant, la relation de Bernoulli est vérifiée :

$$P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Constante}$$

L'équation de Bernoulli relie les pressions, les vitesses et les altitudes de deux points d'une ligne de courant d'un fluide de masse volumique ρ en écoulement laminaire permanent. L'équation de Bernoulli s'écrit entre deux points sur une même ligne de courant de la manière suivante :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$



Les variables P_1 , v_1 , h_1 représentent respectivement la pression, la vitesse et l'altitude du fluide au point 1, tandis que les variables P_2 , v_2 , et h_2 font référence à la pression, la vitesse et l'altitude du fluide au point 2, comme illustré sur le schéma ci-contre. Dans ce schéma, on a choisi arbitrairement deux points 1 et 2 du fluide, mais l'équation de Bernoulli est vérifiée pour n'importe quel couple de points d'une même ligne de courant.

Interprétation :

■ **Energétique.**

- $\frac{1}{2}\rho V^2$ est l'énergie cinétique de l'unité de volume du fluide ;
- $P + \rho g z$ est l'énergie potentielle de l'unité de volume sous la pression P et dans le champ de pesanteur
- donc $P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V^2$ est l'énergie mécanique totale de l'unité de volume et l'équation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie mécanique au cours du mouvement.

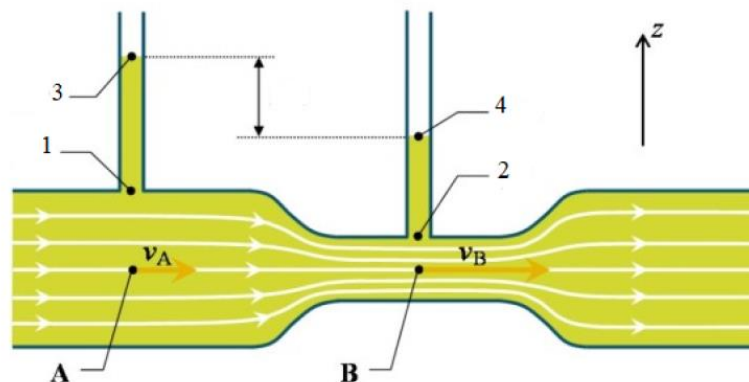
■ Pour les fluides réels (dissipation d'énergie), la relation de Bernoulli n'est plus vérifiée

Effet Venturi.

L'expérience présente ce que l'on appelle communément le débit mètre de Venturi. Il s'agit de faire circuler un fluide dans un tube de Venturi (tube ayant une section plus petite en son milieu). Outre l'arrivée et la sortie du fluide, le tube est relié en différents endroits à des tubes contenant du liquide coloré. Lorsque l'air est envoyé dans le tube, une partie du

liquide des tubes descend dans ceux-ci. On observe différentes hauteurs selon les sections auxquelles les tubes sont reliés, c'est l'effet Venturi. Vous pouvez regarder cette [vidéo](#) qui décrit le tube de venturi.

Dans un cas général, le tube de Venturi est un segment de tuyau cylindrique de section donnée présentant un rétrécissement en son milieu et muni de deux manomètres (instrument servant à mesurer une pression), l'un à l'entrée du tube et l'autre en son rétrécissement. Il est ainsi possible de déterminer les pressions en ces deux points. En effet, un fluide qui passe dans un tel tuyau voit sa pression baisser au niveau de resserrement, alors que sa vitesse s'accroît. Connaissant la section du tube avant et sur le rétrécissement, il est possible de déterminer le débit du tube ainsi que la vitesse du courant aux deux endroits.



On considère un tuyau qui comporte un rétrécissement de section avec deux prises de pression statique. A partir de la relation de Bernoulli, on peut déjà prévoir ce qui va se passer : le rétrécissement de section va provoquer une accélération de l'écoulement et donc une augmentation de la vitesse. Cette augmentation de vitesse, sur une ligne de courant correspond à une diminution de pression : ce tube de Venturi est un système déprimogène.

On écrit la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 qui correspondent à la ligne de courant qui est confondue avec la paroi du tube. On note S_1 la section du tuyau dans la tranche A et S_2 la section du tuyau dans la tranche B :

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$
$$P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho (V_2^2 - V_1^2)$$

Le débit dans la section A est $Q_{v1} = V_1 S_1$ donc :

$$V_1 = \frac{Q_{v1}}{S_1}$$

Le débit dans la section B est $Q_{v2} = V_2 S_2$ donc :

$$V_2 = \frac{Q_{v2}}{S_2}$$

Il y a conservation de la masse et l'écoulement est incompressible donc :

$$Q_{v_1} = Q_{v_2} = Q_v$$

Et la relation s'écrit :

$$P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1) + \frac{1}{2} \rho Q_v^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

Entre les points 1 et 3 , on est en statique des fluides et donc :

$$P_1 = P_3 + \rho g (z_3 - z_1)$$

Entre les points 2 et 4 , on est en statique des fluides et donc :

$$P_2 = P_4 + \rho g (z_4 - z_2)$$

On remplace ces expressions dans la relation de Bernoulli :

$$P_1 - P_2 = [P_3 + \rho g (z_3 - z_1)] - [P_4 + \rho g (z_4 - z_2)] = \rho g (z_2 - z_1) + \frac{1}{2} \rho Q_v^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

$$P_3 - P_4 + \rho g (z_3 - z_4) + \rho g (z_2 - z_1) = \rho g (z_2 - z_1) + \frac{1}{2} \rho Q_v^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

$$P_3 - P_4 + \rho g (z_3 - z_4) = \frac{1}{2} \rho Q_v^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

D'autre part,

$$P_3 = P_4 = P_{\text{atm}}$$

$$z_3 - z_4 = H$$

Donc on obtient finalement :

$$\rho g H = \frac{1}{2} \rho Q_v^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

Soit

$$Q_v = \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gH}$$