

Examen de mathématiques

Jeudi 4 juin 2026

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non

Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1 Gestion topographique et hydrologique d'une plantation de caféiers

Sur les versants à forte pente de l'Ouest-Cameroun, une coopérative cultive du café (*Coffea arabica*) sous ombrage. Pour limiter le ruissellement érosif et installer des barrières de rétention (haies vives d'érosion), les ingénieurs modélisent la topographie d'une parcelle expérimentale de 1 hm × 1 hm.

Dans un repère orthonormé au sol (unités en décamètres, $x \in [0; 10]$ et $y \in [0; 10]$), l'altitude $h(x, y)$ (en mètres) de la parcelle est modélisée par la fonction de deux variables :

$$h(x, y) = -0,05x^3 + 0,3x^2 - 0,1y^2 + 0,4y + 28$$

1. Étude topographique et aménagement anti-érosif

- (a) *Lignes de niveau* : Déterminer l'équation de la ligne de niveau d'altitude $H = 24$. Expliquer brièvement l'intérêt agronomique des lignes de niveau pour l'aménagement des cultures en pente.
- (b) *Vecteur Gradient* : Calculer le vecteur gradient de la fonction $h(x, y)$ en un point quelconque. En déduire la direction et la valeur de la pente maximale au point de coordonnées (2,3).

2. Recherche de zones de stagnation ou de crêtes

- (a) Déterminer les coordonnées du ou des points critiques (ou candidats) de la fonction h sur la parcelle.
- (b) Calculer la matrice hessienne $H_h(x, y)$ de la fonction h .
- (c) *Analyse des extremums* : Déterminer la nature géométrique de chaque point critique (maximum local, minimum local ou point selle). Interpréter le résultat pour la gestion des eaux de surface.

3. Modélisation des flux de ruissellement (Opérateurs de champ vectoriel)

Lors des fortes pluies tropicales, le vecteur flux de ruissellement de l'eau à la surface du sol est modélisé par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y); Q(x, y)) = (3x^2 - 6x; 2y - 4)$$

- (a) *Opérateur Divergence* : Calculer la divergence du flux $\vec{F}$, notée $\text{div}(\vec{F})$.

(b) Évaluer cette divergence au point $(1,2)$. Le sol subit-il à cet endroit une accumulation d'eau (zone de convergence/stockage) ou une perte accélérée (zone de divergence/érosion)? Justifier.

4. *Changement de repère et composition (Matrice Jacobienne et Chain Rule)*

Pour corréler la topographie avec une image satellite, on utilise un système de coordonnées de télédétection (u, v) . La transformation géométrique $T(u, v) = (x, y)$ associant les coordonnées du satellite (u, v) aux coordonnées au sol (x, y) est définie par :

$$T(u, v) = (x(u, v); y(u, v)) = (u^2 - v; u + v^2)$$

On souhaite analyser l'évolution directe de l'altitude perçue par le satellite, c'est-à-dire la fonction composée $k = h \circ T$ définie par $k(u, v) = h(T(u, v))$.

- (a) Déterminer la matrice jacobienne $J_T(u, v)$ de la transformation géométrique T .
- (b) Exprimer la matrice jacobienne de l'altitude h au sol, notée $J_h(x, y)$.
- (c) **(BONUS)** En utilisant la formule de composition des matrices jacobienes (Chain Rule) :

$$J_k(u, v) = J_h(T(u, v)) \times J_T(u, v)$$

Déterminer la matrice jacobienne de la fonction composée k au point de coordonnées capteur $(u, v) = (2, 1)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Étude topographique et aménagement anti-érosif.

- (a) *Lignes de niveau* : Pour déterminer l'équation de la ligne de niveau d'altitude $H = 24$, on résout l'équation $h(x, y) = 24$ sur le domaine d'étude $[0; 10] \times [0; 10]$:

$$-0,05x^3 + 0,3x^2 - 0,1y^2 + 0,4y + 28 = 24$$

$$-0,1y^2 + 0,4y = 0,05x^3 - 0,3x^2 - 4$$

Multiplions l'ensemble de l'équation par -10 afin de simplifier l'écriture des coefficients :

$$y^2 - 4y = -0,5x^3 + 3x^2 + 40$$

En utilisant la forme canonique pour le membre de gauche ($y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$), il vient :

$$(y - 2)^2 - 4 = -0,5x^3 + 3x^2 + 40$$

$$(y - 2)^2 = -0,5x^3 + 3x^2 + 44$$

L'équation explicite de la courbe de niveau $H = 24$ est donc donnée par la relation :

$$y = 2 \pm \sqrt{-0,5x^3 + 3x^2 + 44}$$

Intérêt agronomique : Les lignes de niveau tracent les courbes d'égale altitude sur le terrain. En agronomie, aménager des cultures ou planter des haies vives le long de ces courbes permet de faire obstacle à l'écoulement de l'eau, qui se déplace naturellement perpendiculairement à celles-ci. Cela réduit la vitesse du ruissellement, favorise l'infiltration de l'eau dans le sol et empêche le transport des particules fines de terre arable, protégeant ainsi la parcelle contre l'érosion.

- (b) *Vecteur Gradient* : Le vecteur gradient se compose des dérivées partielles premières de la fonction d'altitude h par rapport à chacune de ses variables :

$$\vec{\nabla} h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,15x^2 + 0,6x \\ -0,2y + 0,4 \end{pmatrix}$$

Évaluons ce vecteur au point de coordonnées $(2, 3)$:

- $\frac{\partial h}{\partial x}(2, 3) = -0,15 \times 2^2 + 0,6 \times 2 = -0,6 + 1,2 = 0,6$
- $\frac{\partial h}{\partial y}(2, 3) = -0,2 \times 3 + 0,4 = -0,6 + 0,4 = -0,2$

On obtient :

$$\vec{\nabla} h(2, 3) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

La *direction* de la pente maximale correspond à celle du vecteur gradient $\begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,2 \end{pmatrix}$. La *valeur* de cette pente maximale est donnée par la norme de ce vecteur :

$$\|\vec{\nabla} h(2, 3)\| = \sqrt{(0,6)^2 + (-0,2)^2} = \sqrt{0,36 + 0,04} = \sqrt{0,40} \approx 0,632 \text{ m} \cdot \text{dam}^{-1}$$

2. Recherche de zones de stagnation ou de crêtes

- (a) *Points critiques* : Les points critiques correspondent aux coordonnées où le vecteur gradient s'annule :

$$\vec{\nabla} h(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -0,15x^2 + 0,6x = 0 \implies 0,15x(4 - x) = 0 \\ -0,2y + 0,4 = 0 \implies -0,2y = -0,4 \end{cases}$$

De la première équation, on extrait $x = 0$ ou $x = 4$. De la seconde, on tire $y = 2$.

Les deux points critiques de la fonction inclus dans la parcelle sont donc :

$$P_1(0, 2) \quad \text{et} \quad P_2(4, 2)$$

(b) *Matrice Hessienne* : On détermine la matrice en calculant les dérivées partielles secondes de h :

- $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = -0,3x + 0,6$
- $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = -0,2$
- $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$

La matrice hessienne $H_h(x, y)$ s'écrit sous forme diagonale :

$$H_h(x, y) = \begin{pmatrix} -0,3x + 0,6 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix}$$

(c) *Analyse des extremums et interprétation* :

- Au point $P_1(0, 2)$: $H_h(0, 2) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix}$.

Les deux valeurs propres étant de signes opposés, P_1 est un point selle (ou point col).

- Au point $P_2(4, 2)$: $H_h(4, 2) = \begin{pmatrix} -0,3(4) + 0,6 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix}$.

Les deux valeurs propres sont strictement négatives, P_2 est un maximum local.

Interprétation hydrologique : Le point maximum P_2 représente une crête ou un sommet topographique depuis lequel l'eau diverge vers des altitudes plus basses. Le point selle P_1 caractérise quant à lui un col : c'est un lieu géométrique de convergence des eaux de ruissellement provenant des hauteurs environnantes avant qu'elles ne s'écoulent vers le bas de la pente.

3. Modélisation des flux de ruissellement (Opérateurs de champ vectoriel)

(a) *Opérateur Divergence* : La divergence du champ vectoriel $\vec{F} = (P, Q)$ se définit par la somme des dérivées partielles de chaque composante par rapport à sa variable propre :

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y - 4)$$

$$\text{div}(\vec{F}) = (6x - 6) + 2 = 6x - 4$$

(b) *Évaluation au point (1, 2) et diagnostic* :

$$\text{div}(\vec{F})(1, 2) = 6(1) - 4 = +2$$

Justification : La divergence étant strictement positive en ce point ($+2 > 0$), l'endroit se comporte mathématiquement comme une « source » de fluide. Physiquement, cela traduit le fait que le volume d'eau sortant de cet espace par unité de temps est supérieur au volume entrant : le fluide subit une accélération locale et s'étire. On en déduit que le sol subit à cet endroit une *perte accélérée (zone de divergence / érosion active du sol arable)*.

4. Changement de repère et composition (Matrice Jacobienne et Chain Rule)

(a) *Matrice jacobienne $J_T(u, v)$* : La transformation $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ lie l'espace satellite à l'espace au sol. Sa matrice jacobienne s'obtient en dérivant ses fonctions composantes par rapport aux variables u et v :

$$J_T(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -1 \\ 1 & 2v \end{pmatrix}$$

(b) *Matrice jacobienne $J_h(x, y)$* : La fonction d'altitude h allant de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, sa matrice jacobienne est une matrice ligne formée par les composantes de son gradient :

$$J_h(x, y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (-0,15x^2 + 0,6x \quad -0,2y + 0,4)$$

- (c) *Calcul de la jacobienne de la fonction composée au point $(u, v) = (2, 1)$: Appliquons la règle de dérivation des fonctions composées (règle de la chaîne) en procédant par étapes :*

Étape 1 : Détermination des coordonnées équivalentes au sol (x, y) .

$$T(2, 1) = \begin{cases} x = 2^2 - 1 = 3 \\ y = 2 + 1^2 = 3 \end{cases} \implies (x, y) = (3, 3)$$

Le point se situe bien à l'intérieur des limites physiques de la parcelle $([0; 10] \times [0; 10])$.

Étape 2 : Évaluation de la jacobienne J_h au point $(3, 3)$.

$$J_h(3, 3) = (-0,15 \times 3^2 + 0,6 \times 3 \quad -0,2 \times 3 + 0,4)$$

$$J_h(3, 3) = (-1,35 + 1,2 \quad -0,6 + 0,4) = (-0,15 \quad -0,2)$$

Étape 3 : Évaluation de la jacobienne J_T au point $(2, 1)$.

$$J_T(2, 1) = \begin{pmatrix} 2(2) & -1 \\ 1 & 2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Étape 4 : Composition par produit matriciel.

$$J_k(2, 1) = J_h(3, 3) \times J_T(2, 1)$$

$$J_k(2, 1) = (-0,15 \quad -0,2) \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_k(2, 1) = ((-0,15 \times 4) + (-0,2 \times 1) \quad (-0,15 \times (-1)) + (-0,2 \times 2))$$

$$J_k(2, 1) = (-0,6 - 0,2 \quad 0,15 - 0,4) = (-0,8 \quad -0,25)$$