

Examen de mathématiques

Jeudi 7 mai 2026

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : Oui Non

Calculatrice autorisée : Oui Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1 Évaluation du bilan hydrique sur une parcelle expérimentale

Dans une zone semi-aride du Sahel, des agronomes étudient la répartition de l'humidité du sol sur une parcelle expérimentale triangulaire destinée à la culture du mil. La parcelle, notée D , est délimitée par l'axe du canal d'irrigation situé en $x = 0$, la limite basse du terrain en $y = 0$, et une clôture diagonale reliant les points $(5, 0)$ et $(0, 2)$ dans un repère cartésien (unités en décamètres).

En raison de la topographie, la disponibilité en eau du sol est représentée par la fonction d'indice hydrique

$$f(x, y) = 2 - \frac{1}{5}x - y$$

- Le terme $2 - \frac{1}{5}x$ modélise l'apport en eau qui diminue à mesure que l'on s'éloigne du canal ($x = 0$)
- Le terme $-y$ représente un facteur de drainage lié à l'élévation (où y croît avec la pente).

La valeur $f(x, y)$ représente un indice. Une valeur positive de f indique une zone propice à la croissance, tandis qu'une valeur proche de 0 ou négative indique un stress hydrique pour le mil.

1. Déterminer l'équation de la droite délimitant la clôture, puis définir le domaine D sous forme d'inégalités.
2. Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy$$

afin d'estimer l'indice hydrique total de la parcelle.

3. Le résultat obtenu est-il positif? Que peut-on en déduire sur la viabilité globale de la parcelle pour la culture du mil?

Correction ▼

[09. 0022]

Exercice 2 Optimisation d'une zone maraîchère péri-urbaine

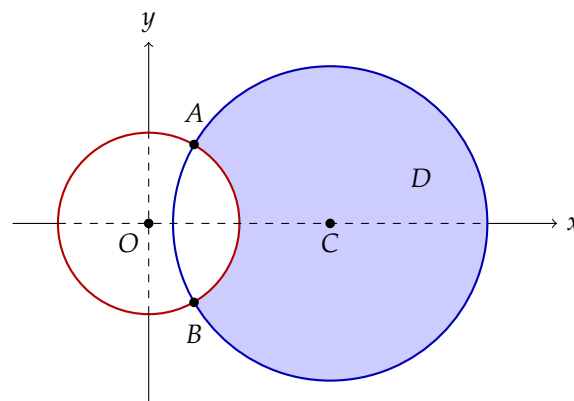
Dans une coopérative agricole au Sénégal, on étudie le rendement d'une parcelle maraîchère irriguée. Le système d'irrigation est alimenté par un forage central situé à l'origine $O(0, 0)$ d'un repère orthonormé (unité : 10 mètres).

- Zone de protection (Z_1) : Pour éviter le tassement du sol près du moteur du forage, une zone circulaire de centre O et de rayon $R_1 = 1$ est interdite à la culture.
- Zone de culture (Z_2) : La zone cultivable est située à l'intérieur d'un grand périmètre circulaire de centre $C(2,0)$ et de rayon $R_2 = \sqrt{3}$.

Le domaine d'étude D est la zone cultivable, définie comme l'ensemble des points situés à l'intérieur du grand périmètre (Z_2) et à l'extérieur de la zone de protection (Z_1). La productivité locale, notée

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

représente l'indice de rendement moyen (en tonnes/are) en fonction de la position sur la parcelle.



1. Donner une description du domaine d'intégration D en fonction des variables x et y .
On rappelle que le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

2. Calculer les points d'intersection des deux cercles, notés A et B .
3. Justifier l'utilisation des coordonnées polaires pour calculer l'intégrale suivante

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy$$

4. On décide d'utiliser les coordonnées polaires (r, θ) . L'objectif de cette question est de déterminer une description du domaine d'intégration, nommé à présent Δ , en fonction des variables r et θ .

(a) En s'appuyant sur les résultats de la question 2, déterminer les bornes de l'angle θ pour le domaine d'étude.

(b) Montrer que pour un angle θ donné, le rayon r évolue entre la borne inférieure $r_{\min} = 1$ et une borne supérieure r_{\max} vérifiant l'équation :

$$r^2 - 4r \cos \theta + 1 = 0$$

(c) Résoudre cette équation et montrer que

$$r_{\max} = 2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}$$

(d) En déduire la description complète du domaine d'intégration Δ .

5. Calculer l'intégrale double I pour estimer le rendement total de cette parcelle maraîchère. On donne

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1} d\theta \simeq 2,69$$

Donner le résultat arrondi à deux décimales.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Équation de la clôture et définition du domaine D

La clôture est une ligne droite passant par les points $P_1(5,0)$ et $P_2(0,2)$.

- L'ordonnée à l'origine se lit directement au point P_2 , soit $b = 2$.
- Le coefficient directeur (pente) a est donné par la formule :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 5} = -\frac{2}{5}$$

L'équation cartésienne de la droite de clôture est donc :

$$y = -\frac{2}{5}x + 2$$

Le domaine triangulaire D est borné à gauche par l'axe des ordonnées ($x \geq 0$), en bas par l'axe des abscisses ($y \geq 0$) et en haut par la clôture. En choisissant une intégration par tranches verticales (domaine de type 1), la variable x varie librement entre 0 et 5 décimètres, tandis que pour un x donné, y varie entre le sol 0 et la clôture.

Le domaine D est défini analytiquement par le système d'inégalités suivant :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq -\frac{2}{5}x + 2 \right\}$$

2. Calcul de l'intégrale double I

D'après le théorème de Fubini sur un domaine simple, on transforme l'intégrale double en deux intégrations simples successives :

$$I = \int_0^5 \left(\int_0^{-\frac{2}{5}x+2} \left(2 - \frac{1}{5}x - y \right) dy \right) dx$$

- Étape 1 : Intégration interne par rapport à y

Pendant cette intégration, la variable x est considérée comme une constante. Trouvons une primitive de la fonction par rapport à y :

$$\int_0^{-\frac{2}{5}x+2} \left(2 - \frac{1}{5}x - y \right) dy = \left[\left(2 - \frac{1}{5}x \right) y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{-\frac{2}{5}x+2}$$

En évaluant à la borne supérieure $y = -\frac{2}{5}x + 2 = 2 \left(1 - \frac{1}{5}x \right)$:

$$\text{Terme 1} = \left(2 - \frac{1}{5}x \right) \left(2 - \frac{2}{5}x \right) = 2 \left(2 - \frac{1}{5}x \right) \left(1 - \frac{1}{5}x \right) = 4 - \frac{6}{5}x + \frac{2}{25}x^2$$

$$\text{Terme 2} = -\frac{1}{2} \left(2 - \frac{2}{5}x \right)^2 = -\frac{1}{2} \left(4 - \frac{8}{5}x + \frac{4}{25}x^2 \right) = -2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}x^2$$

En additionnant ces deux termes (la borne inférieure en $y = 0$ donnant 0), l'intégrande intérieur se simplifie de manière remarquable :

$$\left(4 - \frac{6}{5}x + \frac{2}{25}x^2 \right) + \left(-2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}x^2 \right) = 2 - \frac{2}{5}x$$

- Étape 2 : Intégration externe par rapport à x

Il reste à intégrer l'expression simplifiée par rapport à x sur l'intervalle $[0,5]$:

$$I = \int_0^5 \left(2 - \frac{2}{5}x \right) dx$$

$$I = \left[2x - \frac{2}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left[2x - \frac{x^2}{5} \right]_0^5$$

Évaluons aux bornes :

$$I = \left(2(5) - \frac{5^2}{5} \right) - (0) = 10 - 5 = 5$$

L'indice hydrique cumulé total sur l'ensemble de la parcelle D est égal à 5 unités d'indice · dam².

3. Interprétation agronomique et viabilité

Le résultat de l'intégrale est strictement positif ($I = 5 > 0$).

Conclusions pour la culture du mil :

- Viabilité globale positive :

À l'échelle macroscopique de la parcelle entière, le bilan hydrique est favorable. Le cumul des zones à forte humidité (proches du canal d'irrigation en $x = 0$) compense mathématiquement les pertes subies par le drainage naturel provoqué par la pente dans les zones hautes (valeurs de y élevées).

- Calcul de l'indice moyen :

L'aire de la parcelle triangulaire est

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{5 \times 2}{2} = 5 \text{ dam}^2$$

L'indice hydrique moyen sur le terrain est donc de

$$\bar{f} = \frac{I}{\mathcal{A}} = \frac{5}{5} = 1$$

Un indice moyen de +1 confirme que le milieu offre globalement un environnement adapté au développement racinaire du mil.

- Bien que la parcelle soit globalement viable, l'ingénieur agronome devra rester vigilant : le long de la clôture (où y atteint son maximum), l'indice local $f(x, y)$ chute et s'annule. Il est donc recommandé de concentrer les semis de mil au centre et à l'ouest du domaine (proche de $x = 0$) et éventuellement de prévoir des micro-barrages de retenue d'eau à l'est pour limiter l'effet de drainage (le terme $-y$).

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Description du domaine D en coordonnées cartésiennes

Le domaine d'intégration D est situé à l'extérieur (ou sur la frontière) du disque de protection de centre $O(0, 0)$ et de rayon $R_1 = 1$, et à l'intérieur (ou sur la frontière) du disque de culture de centre $C(2, 0)$ et de rayon $R_2 = \sqrt{3}$. En appliquant les formules de géométrie analytique, les deux équations de disques s'écrivent :

- Exclusion de la zone $Z_1 : x^2 + y^2 \geq 1^2 \implies x^2 + y^2 \geq 1$
- Inclusion dans la zone $Z_2 : (x - 2)^2 + (y - 0)^2 \leq (\sqrt{3})^2 \implies (x - 2)^2 + y^2 \leq 3$

Le domaine D est donc l'ensemble des points vérifiant simultanément le système d'inégalités :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \text{ et } (x - 2)^2 + y^2 \leq 3 \right\}$$

2. Calcul des points d'intersection A et B

Pour trouver les points d'intersection, nous résolvons le système d'équations formé par les frontières des deux cercles :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ (x - 2)^2 + y^2 = 3 & (2) \end{cases}$$

Développons l'équation (2) :

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 3 \implies (x^2 + y^2) - 4x + 4 = 3$$

En substituant la valeur de (1), à savoir $x^2 + y^2 = 1$, dans cette expression, il vient :

$$1 - 4x + 4 = 3 \implies 5 - 4x = 3 \implies 4x = 2 \implies x = \frac{1}{2}$$

Déterminons maintenant les ordonnées correspondantes à l'aide de l'équation (1) :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \implies \frac{1}{4} + y^2 = 1 \implies y^2 = \frac{3}{4} \implies y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les deux points d'intersection sont donc :

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3. Justification du passage en coordonnées polaires

L'utilisation des coordonnées polaires est pleinement justifiée par deux éléments majeurs :

1. *La géométrie du domaine* : Le domaine D est défini par des arcs de cercles centrés ou passant par l'origine. Les frontières s'expriment de manière beaucoup plus simple sous forme de rayons constants ou trigonométriques.
2. *La nature de l'intégrande* : La fonction de productivité locale présente une symétrie circulaire parfaite puisque $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}$. Sa formulation polaire élimine le radical, ce qui simplifie grandement l'intégration.

4. Description du domaine Δ en coordonnées polaires

- (a) *Bornes de l'angle θ* : Les limites angulaires maximales du domaine D vu de l'origine sont définies par les demi-droites issues de O passant par les points d'intersection A et B . Pour le point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$\cos \theta_A = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \theta_A = \frac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta_A = \frac{\pi}{3}$$

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, pour le point B , on trouve $\theta_B = -\frac{\pi}{3}$. L'angle θ évolue donc dans l'intervalle :

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

- (b) *Mise en équation de la borne supérieure du rayon* : Le rayon minimal est constant et imposé par le cercle de protection Z_1 , soit $r_{\min} = 1$. La frontière supérieure correspond au grand cercle d'équation cartésienne $(x - 2)^2 + y^2 = 3$. Développons-la :

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 3 \implies x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$$

En injectant les formules de passage aux coordonnées polaires $x^2 + y^2 = r^2$ et $x = r \cos \theta$, l'équation devient :

$$r^2 - 4r \cos \theta + 1 = 0$$

- (c) *Résolution de l'équation du second degré en r* : Considérons θ fixe. L'équation $r^2 - (4 \cos \theta)r + 1 = 0$ est un polynôme du second degré en r de coefficients $A = 1$, $B = -4 \cos \theta$ et $C = 1$. Calculons son discriminant réduit Δ' :

$$\Delta' = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC = (-2 \cos \theta)^2 - 1 \times 1 = 4 \cos^2 \theta - 1$$

Pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos \theta \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, donc $4 \cos^2 \theta - 1 \geq 0$. Les solutions sont :

$$r = 2 \cos \theta \pm \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}$$

Le grand cercle entourant l'origine, la borne supérieure géométrique de notre domaine correspond à la plus grande des deux racines. On a donc bien :

$$r_{\max} = 2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}$$

(d) *Définition complète du domaine Δ* : L'ensemble Δ s'écrit de manière normale :

$$\Delta = \left\{ (r, \theta) \mid -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ et } 1 \leq r \leq 2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1} \right\}$$

5. Calcul de l'intégrale double I et estimation du rendement

En appliquant le changement de variable en coordonnées polaires, l'élément d'aire devient $dxdy = r drd\theta$. L'intégrale se formule ainsi :

$$I = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}} \frac{1}{r} \cdot r dr \right) d\theta$$

La simplification par r est immédiate, l'intégrande interne se réduit à 1 :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}} 1 dr \right) d\theta$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [r]_1^{2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}} d\theta$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1} - 1 \right) d\theta$$

Par linéarité de l'intégrale, on sépare l'expression en trois parties distinctes :

$$I = 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1} d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 1 d\theta$$

Calculons chacun des trois blocs séparément :

- Bloc 1 : $2 \left[\sin \theta \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 2\sqrt{3} \approx 3,464$

- Bloc 2 (Donnée de l'énoncé) : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 \cos^2 \theta - 1} d\theta \simeq 2,69$

- Bloc 3 : $\left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} \approx 2,094$

Rassemblons l'ensemble des valeurs numériques obtenues :

$$I \simeq 2\sqrt{3} + 2,69 - \frac{2\pi}{3}$$

$$I \simeq 3,464 + 2,69 - 2,094 = 4,06$$

L'indice de rendement total de cette parcelle maraîchère irriguée au Sénégal est estimé à environ 4,06 tonnes.