

# Examen de mathématiques

Jeudi 22 mai 2025

Promotion 114

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) :  Oui  Non

Calculatrice autorisée :  Oui  Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

## Exercice 1 Suite arithmético-géométrique

On s'intéresse à la gestion des déchets au sein d'une grande agglomération. Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5% par an.

Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1er janvier 2020 à collecter et incinérer 12000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine. Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300000 tonnes de déchets.

On admet que la situation peut être modélisée par une suite  $(u_n)$  dont le terme général  $u_n$  donne, pour tout entier naturel  $n$ , une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année  $2019 + n$ . On a ainsi  $u_0 = 300$ .

1. (a) Déterminer  $u_1$ .  
(b) Justifier, pour tout entier naturel  $n$ , que  $u_{n+1} = 0,95u_n + 12$ .
2. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n + X$ , avec  $X$  un réel à déterminer.
  - (a) Déterminer  $X$  afin que la suite  $(v_n)$  soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $v_0$ .
  - (b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - (c) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. (Bonus) En quelle année la quantité de déchets incinérés aura diminué de 15% par rapport à 2019.

[21.0044]

### Exercice 2 Suites adjacentes

Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  données ci-dessous sont des suites adjacentes.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

[21.0045]

---

### Exercice 3 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 8$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  uniquement.

[21.0046]

---