Examen de mathématiques

Mardi 6 mai 2025

Promotion 114

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non   Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.

Exercice 1

Calculer

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

où D est le triangle de sommets $O, A(1,1), B(2,-1)$ et

$$f(x,y) = (x+2y)^2.$$

Indication : Une première étape pourra être de déteminer les équations des droites (OA), (OB) et (AB).

Correction ▼ [09.0016]

Exercice 2

Calculer

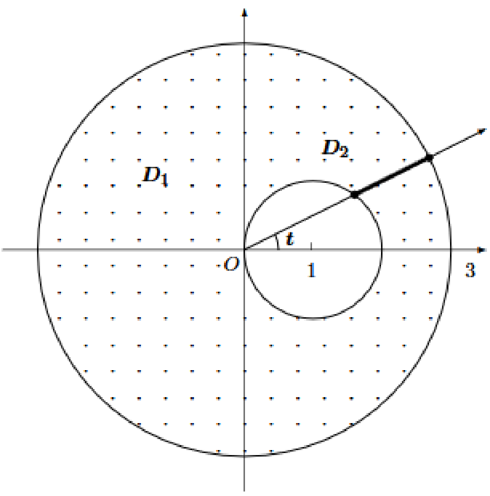
$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

où D est limité par le cercle de centre l'origine O et de rayon 3, et le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1, et

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

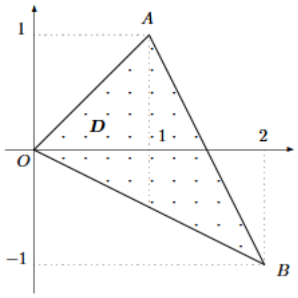
Indication : L'équation du cercle de centre (a,b) et de rayon R peut s'écrire comme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$



Correction ▼ [09.0017]

Correction de l'exercice 1 ▲

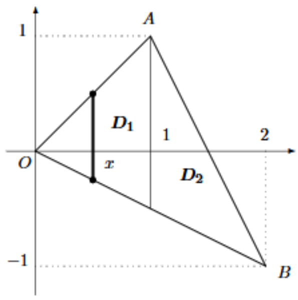


Les droites OA, OB et AB ont pour équations respectives

$$y = x \quad , \quad y = -\frac{x}{2} \quad \text{et} \quad y = -2x + 3$$

On sépare D en deux domaines limités par la droite d'équation $x = 1$.

1) Si x est compris entre 0 et 1.

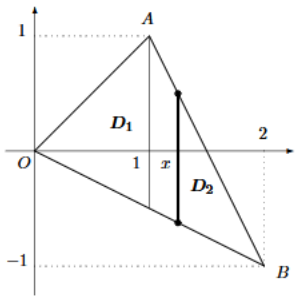


$$(I_y)_1(x) = \int_{-x/2}^{x} (x+2y)^2 dy = \left[\frac{1}{6}(x+2y)^3\right]_{y=-x/2}^{y=x} = \frac{9x^3}{2}$$

d'où

$$\iint_{D_1} (x+2y)^2 dxdy = \int_0^1 (I_y)_1(x)dx = \int_0^1 \frac{9x^3}{2}dx = \frac{9}{8}$$

2) Si x est compris entre 1 et 2.



$$(I_y)_2(x) = \int_{-x/2}^{-2x+3} (x+2y)^2 dy = \left[\frac{1}{6}(x+2y)^3\right]_{y=-x/2}^{y=-2x+3} = \frac{9(2-x)^3}{2}.$$

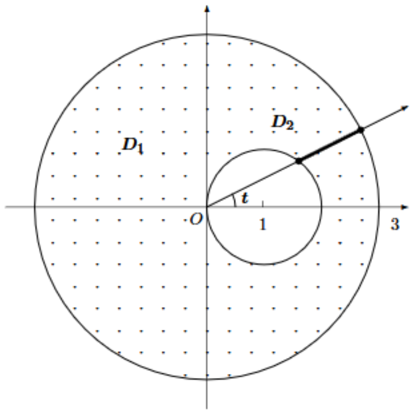
D'où

$$\iint_{D_2} (x+2y)^2 dxdy = \int_1^2 (I_y)_2 (x) dx = \int_1^2 \frac{9(2-x)^3}{2} dx = \left[\frac{-9(2-x)^4}{8} \right]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

Alors

$$I = \iint_{D_1} (x+2y)^2 dxdy + \iint_{D_2} (x+2y)^2 dxdy = \frac{9}{4}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲



On décompose le domaine en deux parties limitées par l'axe Oy. On a

$$f(r\cos t, r\sin t) = r^2$$

La partie D_1 est obtenue lorsque (r, t) parcourt le domaine

$$\Delta_1 = [0,3] \times [\pi/2, 3\pi/2],$$

et on a

$$\iint_{D_1} f(x,y) dxdy = \iint_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t) r dr dt = \iint_{\Delta_1} r^3 dr dt.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement donc

$$\iint_{D_1} f(x,y) dxdy = \left(\int_0^3 r^3 dr \right) \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} dt \right) = \frac{81}{4}\pi$$

Le petit cercle a comme équation cartésienne

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

ou encore

$$x^2 + y^2 = 2x$$

Donc, en coordonnées polaires,

$$r^2 = 2r\cos t$$

soit

$$r = 2\cos t$$

La partie D_2 est obtenue lorsque (r, t) parcourt le domaine

$$\Delta_2 = \left\{(r,t) \mid 2\cos t \leq r \leq 3, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Lorsque t est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on a

$$I_{\mathrm{r}}(t) = \int_{2\cos t}^{3} r^3 dr = \frac{81 - 16\cos^4 t}{4}$$

Donc

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I_r(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{81 - 16\cos^4 t}{4} dt$$

Mais, en linéarisant,

$$\begin{aligned}
\cos^4 t &= \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2t + \cos 4t)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} f(x,y)dxdy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4}[81 - 2(3 + 4\cos 2t + \cos 4t)]dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4}(75 - 8\cos 2t - 2\cos 4t)dt \\
&= \left[\frac{1}{4}\left(75t - 4\sin 2t - \frac{\sin 4t}{2}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{75\pi}{4}
\end{aligned}$$

Finalement

$$I = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \frac{81\pi}{4} + \frac{75\pi}{4} = 39\pi.$$
