Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

# Examen de mathématiques

Lundi 23 novembre 2026

*Promotion 116*

Antoine Géré

---

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

*Remarques :*

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

---

## Exercice 1 Calibrer des parcelles agroforestières au Gabon

Dans la région du Woleu-Ntem, au nord du Gabon, une station teste des *systèmes agroforestiers* associant, sur une même parcelle, de l'okoumé (bois d'œuvre), des cacaoyers (cacao) et des safoutiers (safou, un fruit local). On appelle *module* un type de parcelle d'un hectare, et chaque module fournit par an des quantités connues de ces trois produits. La station reçoit des commandes fixant la production *exacte* à atteindre.

**Étape 1 : Deux modules, deux produits.**
On commence avec deux modules $A$ et $B$ ne produisant que du bois et du cacao. Un hectare fournit par an (en tonnes) :

| | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| Bois | 3 | 1 |
| Cacao | 1 | 2 |

On note $x$ et $y$ le nombre d'hectares des modules $A$ et $B$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = (x \;\; y)^{\mathsf{T}}$. La commande porte sur 11 tonnes de bois et 7 tonnes de cacao.

1. Écrire la commande sous la forme $MX = C$. Calculer $\det(M)$. Qu'en déduit-on sur l'existence et l'unicité de la combinaison $X = (x \;\; y)^{\mathsf{T}}$ ?
2. Résoudre $MX = C$ par la règle de Cramer. Combien d'hectares de chaque module faut-il implanter ?
3. La station envisage de remplacer $B$ par un module $B'$ produisant 6 tonnes de bois et 2 de cacao à l'hectare. Calculer le déterminant de la nouvelle matrice $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les modules $A$ et $B'$ permettent-ils encore d'atteindre *n'importe quelle* commande $(\text{bois}, \text{cacao})$ ? Expliquer, en comparant les profils de production de $A$ et $B'$.

**Étape 2 : Trois modules, trois produits : le déterminant et ses propriétés.**
On ajoute le safou et un troisième module $S$. Les productions annuelles d'un hectare sont désormais :

| | $A$ | $B$ | $S$ |
|---|---|---|---|
| Bois | 2 | 1 | 1 |
| Cacao | 1 | 2 | 1 |
| Safou | 1 | 1 | 3 |



Tournez la page S.V.P.

On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Calculer $\det(M)$ par la méthode de votre choix. Pour toute commande, le système $MX = C$ admet-il une unique solution ?

5. En utilisant **uniquement** les propriétés du déterminant et la valeur de $\det(M)$ trouvée à la question 4, donner :

   (a) $\det(2M)$, où $2M$ est la matrice obtenue en doublant la production de chaque module ;

   (b) $\det(M')$, où $M'$ est obtenue à partir de $M$ en remplaçant la colonne de $S$ par (colonne de $S$) $-$ (colonne de $A$) ;

   (c) $\det(M^{\mathsf{T}})$.

   Justifier chaque réponse par la propriété invoquée.

**Étape 3 : Une seule inversion pour plusieurs commandes.**

6. Calculer la comatrice de $M$, puis montrer que l'on obtient

$$M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. La station doit honorer trois commandes :

$$C_1 = (9 \;\; 8 \;\; 8)^{\mathsf{T}}, \qquad C_2 = (5 \;\; 5 \;\; 8)^{\mathsf{T}}, \qquad C_3 = (7 \;\; 3 \;\; 8)^{\mathsf{T}}.$$

   (a) En utilisant la matrice $M^{-1}$ déjà calculée, déterminer le nombre d'hectares de $A$, $B$ et $S$ pour $C_1$ et $C_2$. Pourquoi disposer de $M^{-1}$ est-il plus avantageux que la règle de Cramer lorsqu'il y a plusieurs commandes ?

   (b) Résoudre de même pour $C_3$. La solution obtenue est-elle agronomiquement acceptable ? Qu'en conclure sur le lien entre « $\det(M) \neq 0$ » et « commande réalisable » ?

**Étape 4 : Un déterminant plus coriace.**

Avant de poursuivre, un fournisseur propose trois *nouveaux* modules $D$, $E$ et $F$ dont les productions annuelles (en tonnes de bois, cacao et safou) sont rassemblées dans la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 7 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. La station ne retiendra ce fournisseur que si, pour toute commande, le dosage des trois modules est déterminé de façon unique. Calculer $\det(N)$ et conclure. Le cas échéant, par quelle opération obtiendrait-on le dosage correspondant à une commande $C$ donnée ?

**Étape 5 : Quand les modules se ressemblent.**

Pour étudier la robustesse du dispositif, on fait varier l'itinéraire technique. Les trois modules sont alors décrits par la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

où $t$ mesure l'intensité de conduite d'un module pour son produit dominant.

9. Montrer que $\det(M(t)) = t^3 - 3t + 2$, puis montrer que l'on peut factoriser ce polynôme comme suit

$$t^3 - 3t + 2 = (t - a)^2(t + b)$$

   où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

10. Pour quelles valeurs de $t$ le système $M(t)X = C$ admet-il une unique solution, quelle que soit la commande $C$ ?

11. Interpréter ces valeurs interdites. Pour $t = 1$, montrer que l'on retrouve une situation déjà rencontrée à l'étape 1 ; pour $t = -2$, identifier la dépendance entre les *lignes* de $M(-2)$ qui annule le déterminant.

**Étape 6 : Ajuster une courbe de rendement *(BONUS)*.**
On mesure le rendement $y$ (en tonnes/ha) d'un module en fonction d'une densité de plantation $x$ (en centaines d'arbres/ha). Trois essais donnent les points $(1;5)$, $(2;5)$ et $(3;1)$. On cherche une parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par ces trois points.

**12.** $\star$ Écrire le système linéaire d'inconnues $a, b, c$ traduisant le passage par les trois points, puis le mettre sous forme matricielle $VX = Y$ en ordonnant les colonnes selon $1, x, x^2$ (de sorte que $V$ soit une matrice de Vandermonde). Résoudre le système, et en déduire la densité $x$ qui maximise le rendement ainsi que le rendement maximal.

**13.** $\star\star$ On considère la matrice $W = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ ; la matrice $V$ de la question 12 en est le cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3)$.

(a) Montrer que $\det(W) = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$.

(b) À quelle condition sur les densités d'essai $\alpha, \beta, \gamma$ existe-t-il une *unique* parabole passant par les trois points ? Que se passe-t-il si deux densités d'essai sont égales ?

(c) *($\star\star\star$)* Conjecturer la valeur du déterminant de $W$ pour $n$ densités distinctes $x_1, \ldots, x_n$.

Indication ▼ Correction ▼ [02.0067]

### Indication pour l'exercice 1 ▲

Dans tout le problème, une « combinaison de modules » se traduit par un système $MX = C$ ($X$ = nombres d'hectares, $C$ = productions commandées). La bonne question avant tout calcul : *le déterminant de $M$ est-il nul ou non ?*

**Étape 1.**

1. Un système carré a une solution (unique) dès que $\det(M) \neq 0$ : la matrice est alors inversible et $X = M^{-1}C$. Calculez $\det(M) = ad - bc$ et concluez sur l'*existence et l'unicité*.

2. Formules de Cramer : $x = \dfrac{\det M_x}{\det M}$, où $M_x$ est $M$ dont on a remplacé la *première* colonne par $C$ ; de même pour $y$ avec la deuxième. Vérifiez en réinjectant $(x, y)$ dans les deux équations.

3. Comparez les deux colonnes de la nouvelle matrice : si l'une est un multiple de l'autre, le déterminant est nul. Interprétez : deux modules de *même* profil apportent-ils une information nouvelle ?

**Étape 2.**

4. Développez le déterminant selon les cofacteurs d'une rangée : $\det(M) = \sum_j a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où $\Delta_{ij}$ est le mineur obtenu en barrant la ligne $i$ et la colonne $j$. Choisissez une rangée aux calculs simples ; vous pouvez refaire le calcul selon une autre rangée pour vérifier.

5. Ici on ne recalcule rien : on invoque des *propriétés*. *(a)* Multiplier une matrice $n \times n$ par un scalaire $\lambda$ multiplie son déterminant par $\lambda^n$ (ici $n = 3$ : attention, ce n'est pas $2\det M$). *(b)* Ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne laisse le déterminant *inchangé*. *(c)* $\det(M^{\mathsf{T}}) = \det(M)$. Nommez à chaque fois la propriété utilisée.

**Étape 3.**

6. $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\big(\mathrm{com}(M)\big)^{\mathsf{T}}$. Calculez les 9 cofacteurs $C_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$. Comme $M$ est symétrique, sa comatrice l'est aussi : la transposition ne change rien.

7. Puisque $M^{-1}$ est connue, chaque commande se calcule par le seul produit $X = M^{-1}C$. *(a)* Faites-le pour $C_1$ et $C_2$, et comparez le coût à celui de Cramer répété. *(b)* Pour $C_3$, calculez de même et *regardez le signe* des composantes : la solution est unique ($\det M \neq 0$), mais un hectare négatif la rend irréalisable.

**Étape 4.**

8. Développez selon une rangée par cofacteurs ; ou, plus rapide, exploitez que les trois colonnes ont la même somme (20) : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, factorisez le 20, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. Concluez sur l'inversibilité ($\det N \neq 0$) ; le dosage d'une commande s'obtiendrait ensuite par $X = N^{-1}C$.

**Étape 5.**

9. Développez le déterminant (par exemple selon la première ligne) pour obtenir le polynôme $t^3 - 3t + 2$. Cherchez une racine évidente (essayez $t = 1$) : elle permet de mettre $(t-1)$ en facteur, puis de factoriser le reste. Identifiez alors $a$ et $b$ dans la forme $(t-a)^2(t+b)$.

10. « Unique pour toute commande » $\iff$ matrice inversible $\iff$ $\det\big(M(t)\big) \neq 0$. Lisez les valeurs interdites directement sur la forme factorisée.

11. Écrivez $M(t)$ pour chaque valeur interdite. Pour $t = 1$, vous devez reconnaître la situation de la question 3 (colonnes identiques, donc proportionnelles). Pour $t = -2$, cherchez plutôt une combinaison des *lignes* qui s'annule. Traduisez agronomiquement (modules interchangeables, redondance).

**Étape 6 — bonus.**

12. Chaque point $(x_k, y_k)$ impose $ax_k^2 + bx_k + c = y_k$ : vous obtenez un système $3 \times 3$ d'inconnues $a, b, c$. Ordonnez les colonnes selon $1, x, x^2$ pour faire apparaître une matrice de Vandermonde, puis résolvez par différences de lignes ($L_2 - L_1$, $L_3 - L_2$) pour éliminer $c$. Rappelez-vous enfin que l'extremum d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$ est atteint en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

**13.** *(a)* Retranchez la première ligne aux autres ($L_i \leftarrow L_i - L_1$), développez selon la première colonne, puis factorisez les différences de carrés. *(b)* Le déterminant s'annule exactement quand deux des densités coïncident. *(c)* Conjecturez la forme produit $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ à partir du cas $3 \times 3$.

---



Tournez la page S.V.P.

### Correction de l'exercice 1 ▲

Dans tout le problème, une « combinaison de modules » se traduit par un système $MX = C$ : $X$ est le vecteur des nombres d'hectares, $C$ le vecteur des productions commandées. La question décisive, avant tout calcul, est : *le déterminant de $M$ est-il nul ou non ?*

**Étape 1.**

1. Le système s'écrit $MX = C$ avec $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$. On a $\det(M) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 \neq 0$ : la matrice est inversible, donc le système admet une *unique* solution $X = M^{-1}C$ : la combinaison existe *et* est unique.

2. *Cramer* (on remplace dans $M$ la colonne associée à l'inconnue par $C$) :

$$\det M_x = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 7 = 15, \qquad \det M_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 11 = 10,$$

d'où $x = \dfrac{15}{5} = 3$ et $y = \dfrac{10}{5} = 2$ : il faut 3 **ha du module $A$ et 2 ha du module $B$**. *(Contrôle : bois $= 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 11$, cacao $= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$.)*

3. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0$. En effet $B' = (6,2) = 2 \times (3,1) = 2\,A$ : le module $B'$ a exactement le *même profil de production* que $A$ (rapport bois :cacao $= 3 : 1$), à un facteur 2 près. Les deux colonnes sont proportionnelles, le déterminant est nul : avec $A$ et $B'$ on ne peut atteindre que les commandes dont le rapport bois :cacao vaut $3 : 1$, et *pas* n'importe quel couple. Il faut deux modules de profils *différents*.

**Étape 2.**

4. *Développement selon la première colonne* (coefficients $2, 1, 1$, signes $+, -, +$) :

$$\det(M) = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(5) - 1(2) + 1(-1) = 7.$$

*(On peut vérifier par un développement selon la troisième ligne : $1(-1) - 1(1) + 3(3) = 7$.)* Comme $\det(M) = 7 \neq 0$, $M$ est inversible : pour toute commande $C$, le système $MX = C$ admet une unique solution.

5. *Propriétés du déterminant.*

   (a) Multiplier *toute* la matrice par 2, c'est multiplier ses *trois* colonnes par 2 ; chaque facteur sort du déterminant : $\det(2M) = 2^3 \det(M) = 8 \times 7 = \boxed{56}$. *(Attention : ce n'est pas $2 \det M$.)*

   (b) Ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne ne change pas le déterminant. Ici $M'$ s'obtient par $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, donc $\det(M') = \det(M) = \boxed{7}$.

   (c) Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée : $\det(M^{\mathsf{T}}) = \det(M) = \boxed{7}$.

**Étape 3.**

6. Chaque cofacteur est $(-1)^{i+j}$ fois le mineur obtenu en barrant la ligne $i$ et la colonne $j$ :

$$\operatorname{com}(M) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$M$ étant symétrique, $(\operatorname{com}(M))^{\mathsf{T}} = \operatorname{com}(M)$, donc

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (\operatorname{com}(M))^{\mathsf{T}} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*(Contrôle : première ligne de $M$ fois première colonne de $M^{-1}$ : $\frac{1}{7}(2 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1)) = \frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.)*

7. Chaque commande se résout par un simple produit $X = M^{-1}C$.

   (a)
   $$X_1 = M^{-1}C_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 45-16-8 \\ -18+40-8 \\ -9-8+24 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   $$X_2 = M^{-1}C_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 25-10-8 \\ -10+25-8 \\ -5-5+24 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Donc $C_1$ demande 3 ha de $A$, 2 de $B$, 1 de $S$ ; et $C_2$, 1 ha de $A$, 1 de $B$, 2 de $S$. *Avantage de $M^{-1}$ :* $M$ est inversée *une seule fois* ; chaque nouvelle commande ne coûte plus qu'un produit matrice–vecteur, alors que la règle de Cramer impose de recalculer trois déterminants $3\times 3$ *pour chaque* commande.

   (b)
   $$X_3 = M^{-1}C_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 35-6-8 \\ -14+15-8 \\ -7-3+24 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   La solution est *unique* (puisque $\det(M) \neq 0$), mais $y = -1$ : il faudrait planter $-1$ ha du module $B$, ce qui est impossible. **La commande $C_3$ n'est donc pas réalisable**, bien que le système soit inversible. Moralité : $\det(M) \neq 0$ garantit l'existence et l'unicité *mathématiques* du dosage, mais pas sa *faisabilité* agronomique, qui exige en plus que toutes les composantes de $X$ soient positives ($X \geq 0$).

**Étape 4.**

8. *Développement direct selon la première colonne* (coefficients $9, 7, 4$, signes $+, -, +$) :
   $$\det(N) = 9\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 9(27) - 7(-47) + 4(-73) = 243 + 329 - 292 = \boxed{280}.$$

   *Variante plus rapide (propriétés).* Les trois colonnes de $N$ ont la même somme ($9+7+4 = 5+8+7 = 11+3+6 = 20$) : en remplaçant $L_1$ par $L_1 + L_2 + L_3$ (déterminant inchangé) on factorise le 20, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ créent des zéros :
   $$\det(N) = 20\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 \times 14 = 280.$$

   Comme $\det(N) = 280 \neq 0$, $N$ est inversible : pour toute commande le système $NX = C$ admet une unique solution, donc la station *peut* retenir le fournisseur. Le dosage d'une commande $C$ s'obtiendrait alors par $X = N^{-1}C$ (comme à l'étape 3) — sous réserve, là encore, qu'il soit à composantes positives.

**Étape 5.**

9. En développant selon la première ligne :
   $$\det\big(M(t)\big) = t\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t(t^2-1) - (t-1) + (1-t) = t^3 - 3t + 2.$$

   La racine évidente $t = 1$ ($1 - 3 + 2 = 0$) permet de factoriser par $(t-1)$ :
   $$t^3 - 3t + 2 = (t-1)(t^2+t-2) = (t-1)(t-1)(t+2) = (t-1)^2(t+2).$$

   On a donc la forme $(t-a)^2(t+b)$ avec $\boxed{a = 1}$ et $\boxed{b = 2}$.

10. Le système $M(t)X = C$ admet une unique solution quelle que soit la commande exactement lorsque $\det\big(M(t)\big) \neq 0$, soit $(t-1)^2(t+2) \neq 0$, c'est-à-dire $\boxed{t \neq 1 \text{ et } t \neq -2}$.

11. *Interprétation.*



Tournez la page S.V.P.

- $t = 1$ : $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a ses trois colonnes identiques. On retrouve exactement la situation de l'étape 1 (colonnes proportionnelles, question 3) : les trois modules ont le même profil, ils sont interchangeables, et les surfaces ne sont plus déterminées de façon unique.
- $t = -2$ : la dépendance est d'une *autre* nature. Chaque ligne de $M(-2)$ somme à $-2+1+1 = 0$, donc $L_1 + L_2 + L_3 = 0$ : ce sont ici les *lignes* (et non les colonnes) qui sont liées. Le déterminant s'annule, l'inversibilité est perdue. (La valeur $t = -2$ n'a pas de sens agronomique direct ; elle illustre un second mécanisme d'annulation du déterminant.)

**Étape 6 — bonus.**

12. Le passage par chaque point $(x_k, y_k)$ impose $ax_k^2 + bx_k + c = y_k$. En ordonnant les monômes par degré croissant $1, x, x^2$ (vecteur d'inconnues $(c \;\; b \;\; a)^{\mathsf{T}}$) :

$$\begin{cases} c + b + a = 5 & (x = 1) \\ c + 2b + 4a = 5 & (x = 2) \\ c + 3b + 9a = 1 & (x = 3) \end{cases} \iff VX = Y, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$V$ est une matrice de Vandermonde, de déterminant $\det V = (2-1)(3-1)(3-2) = 2 \neq 0$ (question 13) : le système a une unique solution. On la trouve par différences de lignes : $L_2 - L_1$ donne $b + 3a = 0$ et $L_3 - L_2$ donne $b + 5a = -4$ ; par soustraction $2a = -4$, d'où $a = -2$, $b = 6$ et $c = 5 - b - a = 1$. Ainsi $y = -2x^2 + 6x + 1$. Comme $a < 0$, la parabole admet un maximum au sommet $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, et $y\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} + 9 + 1 = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$. **La densité optimale est $x = 1{,}5$ (soit 150 arbres/ha), pour un rendement maximal de $5{,}5$ t/ha.**

13. (a) On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ (ces opérations ne changent pas le déterminant), puis on développe selon la première colonne :

$$\det(W) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta - \alpha & \beta^2 - \alpha^2 \\ 0 & \gamma - \alpha & \gamma^2 - \alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta - \alpha & \beta^2 - \alpha^2 \\ \gamma - \alpha & \gamma^2 - \alpha^2 \end{vmatrix}.$$

On factorise $\beta^2 - \alpha^2 = (\beta - \alpha)(\beta + \alpha)$ et $\gamma^2 - \alpha^2 = (\gamma - \alpha)(\gamma + \alpha)$, puis on sort $(\beta - \alpha)$ et $(\gamma - \alpha)$ de chaque ligne :

$$\det(W) = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \begin{vmatrix} 1 & \beta + \alpha \\ 1 & \gamma + \alpha \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

(b) Ce produit est non nul si et seulement si $\alpha, \beta, \gamma$ sont deux à deux distincts : tant que les trois densités d'essai sont distinctes, le système est de Cramer et il existe une *unique* parabole passant par les trois points. Si deux densités sont égales (par exemple $\alpha = \beta$), deux lignes de $W$ sont identiques, $\det(W) = 0$ : plus d'unicité (en général aucune parabole, ou une infinité).

(c) *Généralisation.* Pour $n$ densités distinctes $x_1, \ldots, x_n$,

$$\det(W) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0.$$