

Examen de mathématiques

Lundi 12 janvier 2026

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : Oui Non

Calculatrice autorisée : Oui Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1 Gestion de la fertilité des sols

Dans un village au Sénégal, on étudie l'évolution de la qualité des sols cultivé sur trois parcelles différentes : parcelle A, parcelle B et parcelle C. Chaque année, la qualité du sol de chaque parcelle dépend d'un mélange de fertilisation et d'échanges entre parcelles.

On modélise cette évolution par la suite vectorielle (U_n) définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

où u_n , v_n et w_n représentent la qualité du sol des parcelles A, B et C à l'année 2020 + n . L'évolution annuelle est donnée par :

$$U_{n+1} = A U_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients positifs représentent des apports ou enrichissements d'une parcelle à l'autre. Les coefficients négatifs représentent des pertes de qualité (extraction de nutriments, compétition ou surexploitation). Les coefficients zéro indiquent l'absence d'influence directe. Par exemple, la première ligne de A qui correspond à la parcelle A

$$(1, 3, 0)$$

peut être interprétée comme suit :

- Le coefficient 1 : la parcelle A conserve sa qualité naturelle d'une année sur l'autre (auto-entretien).
- Le coefficient 3 : la parcelle B influence fortement la parcelle A, par exemple via un transfert de nutriments ou compost, ou par l'irrigation partagée.
- Le coefficient 0 : la parcelle C n'a pas d'effet direct sur la parcelle A.

On note $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ la qualité initiale des sols (en 2020).

- La parcelle A a une qualité légèrement positive au départ, le sol est fertile et favorable aux cultures.
- La parcelle B est appauvrie, peut-être surexploitée ou ayant subi un lessivage important.
- La parcelle C a une qualité neutre, ni appauvrie ni enrichie, ou on considère un état de référence.

Il vous est proposé de réaliser l'analyse théorique suivante.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A .
2. La matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.
3. Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé.
4. En déduire la matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} -6 & 10 & 2 \\ 7 & 0 & 21 \\ -15 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

6. Calculer A^n .
7. Exprimer U_n en fonction de U_0 et n .
8. À partir de la formule explicite de U_n , discuter ce qu'il advient de la qualité du sol des parcelles à long terme ($n \rightarrow +\infty$).

[04.0043]