istom
Ecole supérieure d'agro-développement international

Examen de mathématiques

Lundi 15 décembre 2025

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non   Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie comme suit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Peut-on affirmer dès à present que la matrice A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.
3. Calculer les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres déterminées précédement.
4. En déduire la matrice de passage P et la matrice diagonale D.
5. Inverser la matrice de passage P.
6. Calculer A^n, avec $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [04.0041]

Exercice 2

Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie comme suit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de B.
2. Peut-on affirmer dès à present que la matrice B est diagonalisable ? Justifier votre réponse.

3. Calculer les vecteurs propres de B associés aux valeurs propres déterminées précédement.
4. En déduire la matrice de passage P et la matrice diagonale D.
5. Inverser la matrice de passage P.
6. **(BONUS)** Calculer B^n, avec $n \in \mathbb{N}$.
7. **(BONUS)** On considère maintenant trois suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par leurs premiers termes

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 1, \qquad w_0 = 0$$

et pour tous $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + 3v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} - v_{n-1} + w_{n-1} \end{cases}$$

Déterminer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Correction ▼ [04.0042]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie comme suit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de A.*

   On calcule le polynome caractéristique $P(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \times (3-\lambda) \times \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \times (\lambda^2 - 1) \\ &= (3-\lambda) \times (\lambda - 1) \times (\lambda + 1) \end{aligned}$$

   On trouve comme valeurs propres $\{-1, 1, 3\}$.

2. *Peut-on affirmer dès à present que la matrice A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.*

   La matrice A est une matrice carrée de dimenssion 3 et admet 3 valeurs propres disctinctes deux à deux. On peut donc affirmer que A est diagonalisable.

3. *Calculer les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres déterminées précédement.*

   - Valeur propre $\lambda = 1$
     On cherche les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ en résolvant

$$AX = 1X \iff (A - I_3)X = 0.$$

     On a

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

     Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le système associé est

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

     La troisième équation donne :

$$2x - 2y = 0 \iff x = y.$$

En remplaçant dans la première équation :

$$x - x + z = 0 \iff z = 0.$$

La deuxième équation est alors automatiquement vérifiée. On obtient donc :

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'espace propre associé à $\lambda = 1$ est

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Un vecteur propre associé à $\lambda = 1$ est donc

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

- Valeur propre $\lambda = -1$
  On résout maintenant

$$AX = -1X \iff (A + I_3)X = 0.$$

On a

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le système associé est

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

La troisième équation se simplifie en :

$$x - y + z = 0.$$

Soustrayons la deuxième équation à la troisième :

$$(x - y + z) - (x + y - z) = 0 \iff -2y + 2z = 0 \iff y = z.$$

En reportant dans la deuxième équation :

$$x + y - y = 0 \iff x = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Donc l'espace propre associé à $\lambda = -1$ est

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Un vecteur propre associé à $\lambda = -1$ est donc

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

- Valeur propre $\lambda = 3$
  On résout
$$AX = 3X \iff (A - 3I_3)X = 0.$$
  On a
$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
  Le système associé est
$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$
  La troisième équation se simplifie :
$$x - y - z = 0.$$
  Soustrayons la troisième équation à la deuxième :
$$(x - 3y - z) - (x - y - z) = 0 \iff -2y = 0 \iff y = 0.$$
  En remplaçant dans la première équation :
$$-x + z = 0 \iff z = x.$$
  On obtient donc
$$\begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$$
  L'espace propre associé à $\lambda = 3$ est alors
$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
  Un vecteur propre associé à $\lambda = 3$ est donc
$$\boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

4. *En déduire la matrice de passage P et la matrice diagonale D.*
   On peut alors écrire la matrice de passage P et la matrice diagonale D comme suit :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. *Inverser la matrice de passage P.*
   On cherche à inverser la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On écrit la matrice augmentée $(P \mid I_3)$ comme suit
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$
   On va effectuer une succesion d'opérations élémentaires.

- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
- $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
- $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
- $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
- $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

La partie gauche est désormais l'identité I_3, donc la partie droite est P^{-1}.
On obtient ainsi :
$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$
On peut vérifier que
$$PP^{-1} = I_3,$$
ce qui confirme que le calcul est correct.

6. *Calculer A^n, avec $n \in \mathbb{N}$.*
On a montré précédemment que la matrice A est diagonalisable. Elle s'écrit donc sous la forme
$$A = PDP^{-1},$$
où
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Pour tout entier naturel n, on a :
$$A^n = (PDP^{-1})^n.$$
En utilisant l'associativité du produit matriciel et le fait que
$$P^{-1}P = I_3,$$
on obtient :
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
La matrice D est diagonale, donc ses puissances se calculent terme à terme sur la diagonale :
$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

On calcule d'abord le produit :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Comme D^n est diagonale, chaque colonne de P est multipliée par la valeur propre correspondante :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n \\ 1 & (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

On multiplie maintenant par P^{-1} :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n \\ 1 & (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calcul, on obtient :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n & -1+3^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & -1-(-1)^n \\ 3^n-(-1)^n & -3^n-(-1)^n & 3^n+(-1)^n \end{pmatrix}.}$$

Pour tout entier naturel n, la puissance A^n s'exprime explicitement en fonction de $(-1)^n$ et 3^n, ce qui permet :

- un calcul rapide de A^n pour tout n,
- l'étude du comportement asymptotique de A^n lorsque $n \to +\infty$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie comme suit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de B.*

   Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

   On effectue l'opération

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

   pour simplifier le déterminant. On obtient :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

   On peut ensuite effectuer

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (-1)^{3+3} \times (2-\lambda) \times (1-\lambda) \times (2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^2 \, (1-\lambda) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont donc

$$\boxed{\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \text{ (multiplicité 2)}}.$$

2. *Peut-on affirmer dès à present que la matrice B est diagonalisable ? Justifier votre réponse.*

   Une matrice 3×3 est diagonalisable si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3.

   Ici :

   - $\lambda = 1$ a une multiplicité de 1,
   - $\lambda = 2$ a une multiplicité de 2.

   Il faut donc vérifier que la dimension du sous-espace propre associé à $\lambda = 2$ est égale à 2.

   On ne peut donc *pas encore* affirmer que B est diagonalisable sans calculer les vecteurs propres.

3. *Calculer les vecteurs propres de B associés aux valeurs propres déterminées précédement.*

   On a trouvé que les valeurs propres de B sont

   $$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \text{ (multiplicité 2)}.$$

   Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$

   On résout le système

   $$B = 1X \iff (B - I_3)X = 0 \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   $$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Le système s'écrit :

   $$\begin{cases} 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \implies y + z = 0, \\ -x + 2y + z = 0, \\ x - y + 0 \cdot z = 0 \implies x - y = 0. \end{cases}$$

   - De la troisième équation : $x = y$
   - De la première équation : $y + z = 0 \implies z = -y$
   - Vérification avec la deuxième : $-x + 2y + z = -y + 2y - y = 0$, correct.

   Donc un vecteur propre est

   $$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y \neq 0.$$

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 2$

On résout

$$B = 2X \iff (B - 2I_3)X = 0.$$

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0, \\ -x + y + z = 0, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

- Les deux premières équations sont identiques : $-x + y + z = 0 \implies x = y + z$
- La troisième équation : $x - y - z = (y + z) - y - z = 0$, correct.

On a donc deux paramètres libres, par exemple y et z. On peut écire :

$$X = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une base de l'espace propre associé à $\lambda_2 = 2$ est donc

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Conclusion :

Comme la somme des dimensions des espaces propres est $1 + 1 + 1 = 3$, la matrice B est diagonalisable.

4. *En déduire la matrice de passage P et la matrice diagonale D.*

   On choisit comme matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   et la matrice diagonale associée

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   On a alors

$$B = PDP^{-1}.$$

5. *Inverser la matrice de passage P.*

On forme la matrice augmentée $(P \mid I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

L'objectif est de transformer la partie gauche en la matrice identité.

Opération-s 1 :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Opération 2 :

Permutons $L_2 \leftrightarrow L_3$ pour avoir un pivot (coeffcient sur la diagonale) non nul :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Opération-s 3 :

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Opération 4 :

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

La partie gauche est maintenant I_3, donc la partie droite est l'inverse :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. *Calculer B^n, avec $n \in \mathbb{N}$.*

On a trouvé que B est diagonalisable avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc
$$B^n = PD^nP^{-1}.$$

Comme D est diagonale, il suffit d'élever chaque valeur propre à la puissance n :
$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

On commence par le calcul du produit D^nP^{-1}.
$$D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2^n & 2 \cdot 2^n & 2^n \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule esnuite $B^n = P(D^nP^{-1})$
$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2^n & 2 \cdot 2^n & 2^n \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où
$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ -(2^n - 1) & 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix}.$$

7. *On considère maintenant trois suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par leurs premiers termes*
$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 1, \qquad w_0 = 0$$
et pour tous $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + 3v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} - v_{n-1} + w_{n-1} \end{cases}$$
Déterminer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Mise sous forme matricielle

Posons
$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit :
$$X_n = BX_{n-1}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration par récurrence que $X_n = B^nX_0$

On considère la suite de vecteurs
$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$
définie par
$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_n = BX_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On souhaite démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = B^n X_0.$$

- Initialisation :
  Pour $n = 0$:
  $$X_0 = B^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0.$$
  La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- Hérédité
  Supposons que la propriété soit vraie pour un certain $n \geq 0$, c'est-à-dire
  $$X_n = B^n X_0.$$
  On doit montrer qu'elle est vraie pour $n + 1$:
  $$X_{n+1} = BX_n \quad \text{(par définition de la suite)}.$$
  En utilisant l'hypothèse de récurrence $X_n = B^n X_0$:
  $$X_{n+1} = BX_n = B(B^n X_0) = B^{n+1} X_0.$$

- Conclusion
  Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\boxed{X_n = B^n X_0}.$$

Expression générale grâce à la diagonalisation
On a $B = PDP^{-1}$, donc

$$X_n = B^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0.$$

Rappelons :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $P^{-1}X_0$

$$P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Application de D^n

$$D^n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \cdot 2^n \\ -1 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2^{n+1} \\ -2^n \end{pmatrix}.$$

Multiplication par P

$$X_n = P(D^n P^{-1} X_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2^{n+1} \\ -2^n \end{pmatrix}.$$

Calculons chaque composante :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2^{n+1} + 1 \cdot (-2^n) = -1 + 2^{n+1} - 2^n = 2^n - 1, \\ v_n &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2^{n+1} + 0 \cdot (-2^n) = -1 + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1, \\ w_n &= -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2^{n+1} + 1 \cdot (-2^n) = 1 - 2^n = 1 - 2^n. \end{aligned}$$

Conclusion

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites sont donc données par :

$$\boxed{u_n = 2^n - 1, \quad v_n = 2^{n+1} - 1, \quad w_n = 1 - 2^n}.$$

Ces expressions vérifient bien les conditions initiales :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad w_0 = 0.$$
