Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Examen de mathématiques

Vendredi 6 décembre 2024

Promotion 114

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.

Exercice 1

Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie comme suit

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -9 & 10 & 9 \\ 6 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la définition du polynôme caractéristique que l'on définira à partir de la matrice A. On notera P ce polynôme.
2. Calculer explicitement ce polynôme P. Montrer que l'on peut écrire
$$P(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$
3. En déduire les valeurs propres de la matrice A. Peut-on affirmer dès à present que la matrice A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.
4. Calculer les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres déterminées précédement. Montrer que l'on a
$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
5. En déduire la matrice de passage P.
6. Inverser la matrice de passage P.
7. Calculer A^6.

[04.0035]

Exercice 2 Système dynamique linéaire (Bonus)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = v_0 = 1$ et satisfaisant, pour tout $n \geq 0$, le système de relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 4v_n \end{array}\right.$$

Déterminer les expressions explicites des suites (u_n) et (v_n).

[04.0036]
