

Examen de mathématiques

Mercredi 3 juin 2026

Promotion 116

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non

Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1 Optimisation des ressources d'une exploitation agricole au Sahel

Dans une région semi-aride du Sahel africain, un groupement de producteurs cherche à optimiser la gestion d'un périmètre maraîcher communautaire. Les ingénieurs agronomes doivent évaluer trois paramètres critiques : la dynamique de recharge d'un bassin de rétention, la cinétique de séchage des récoltes de gombo pour éviter le gaspillage, et l'évolution du stock de fourrage pour le bétail pendant la saison sèche.

1. Cinétique de remplissage d'un bassin de rétention

Pour pallier le manque d'eau en fin de saison, les eaux de ruissellement d'une averse de mousson sont collectées. Le débit de remplissage du bassin, noté $q(t)$ (en $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$), est modélisé sur une durée de 6 heures par :

$$q(t) = \frac{6t}{t^2 + 4} + \sqrt{2t + 1}$$

Calculer le volume total d'eau V (en m^3) capté dans le bassin entre $t = 0$ et $t = 4$ heures, c'est-à-dire calculer l'intégrale simple suivante :

$$V = \int_0^4 q(t) dt$$

2. Cinétique de séchage solaire du gombo

Le gombo est une culture de contre-saison¹ cruciale. Pour sa conservation, il est séché à l'aide d'un séchoir solaire parabolique. La vitesse d'évacuation de l'humidité résiduelle $v(t)$ (en $\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$) au cours des 2 premières heures suit la fonction :

$$v(t) = (3t + 1) \cdot e^{-2t}$$

À l'aide d'une unique intégration par parties, calculer la quantité totale d'eau M (en kg) évaporée par le gombo entre $t = 0$ et $t = 2$ heures, c'est-à-dire l'intégrale suivante :

$$M = \int_0^2 v(t) dt$$

¹Une culture de contre-saison désigne la production de végétaux en dehors de leur période usuelle de culture

3. *Suivi flash de dégradation des stocks de fourrage*

Pendant la saison sèche, la dégradation thermique initiale lors des deux premières heures de stockage du fourrage est modélisée par un taux de perte horaire $p(t)$ (en $\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$) défini par :

$$p(t) = \frac{t e^{t^2}}{(e^{t^2} + 1)^2}$$

Calculer la perte de fourrage cumulée P (en kg) subie lors de cette phase de transition entre $t = 0$ et $t = 2$ heures :

$$P = \int_0^2 \frac{t \cdot e^{t^2}}{(e^{t^2} + 1)^2} dt$$

Indication : On effectuera le changement de variable $u = e^{t^2} + 1$.

4. **(BONUS)** *Cinétique d'assimilation des phosphates (Décomposition en éléments simples)*

Afin de corriger une carence du sol, un engrais phosphaté soluble est appliqué. Le flux d'assimilation du phosphore par les racines, noté $f(t)$ (en $\text{mg} \cdot \text{h}^{-1}$), suit une loi de décroissance modélisée sur les 3 premières heures par :

$$f(t) = \frac{t + 5}{(t + 1)(t + 3)}$$

(a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{t + 5}{(t + 1)(t + 3)} = \frac{a}{t + 1} + \frac{b}{t + 3}$$

(b) En déduire la masse totale F (en mg) de phosphore assimilée par la plante entre $t = 0$ et $t = 3$ heures, c'est-à-dire l'intégrale suivante

$$F = \int_0^3 f(t) dt$$

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Cinétique de remplissage d'un bassin de rétention.

Nous cherchons à calculer le volume d'eau capté V donné par l'intégrale :

$$V = \int_0^4 \left(\frac{6t}{t^2 + 4} + \sqrt{2t + 1} \right) dt$$

Par linéarité de l'intégrale, nous pouvons séparer le calcul en deux étapes distinctes :

$$V = \int_0^4 \frac{6t}{t^2 + 4} dt + \int_0^4 (2t + 1)^{1/2} dt$$

- *Étude de la première intégrale :*

L'expression peut se réécrire sous la forme

$$3 \times \frac{2t}{t^2 + 4}$$

On reconnaît alors la forme structurelle

$$\frac{u'(t)}{u(t)}$$

où $u(t) = t^2 + 4$, dont la dérivée est bien $u'(t) = 2t$. Une primitive est donc donnée par la fonction

$$t \mapsto 3 \ln |t^2 + 4|$$

Puisque $t^2 + 4 > 0$, les barres de valeur absolue ne sont pas nécessaires.

- *Étude de la seconde intégrale :*

L'expression est de la forme

$$(2t + 1)^{1/2}$$

Pour faire apparaître la forme générale

$$w'(t) \cdot w(t)^n$$

on ajuste par un facteur multiplicatif en écrivant

$$\frac{1}{2} \times 2(2t + 1)^{1/2}$$

où $w(t) = 2t + 1$ et $w'(t) = 2$. Une primitive est donc

$$\frac{1}{2} \times \frac{(2t + 1)^{1/2+1}}{1/2 + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{(2t + 1)^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3} (2t + 1)^{3/2} = \frac{1}{3} \sqrt{(2t + 1)^3}$$

En rassemblant ces deux primitives, on obtient :

$$V = \left[3 \ln(t^2 + 4) + \frac{1}{3} \sqrt{(2t + 1)^3} \right]_0^4$$

- *Évaluation à la borne supérieure ($t = 4$) :*

$$V(4) = 3 \ln(4^2 + 4) + \frac{1}{3} \sqrt{(2 \times 4 + 1)^3} = 3 \ln(20) + \frac{1}{3} \sqrt{9^3} = 3 \ln(20) + \frac{27}{3} = 3 \ln(20) + 9$$

- *Évaluation à la borne inférieure ($t = 0$) :*

$$V(0) = 3 \ln(0^2 + 4) + \frac{1}{3} \sqrt{(2 \times 0 + 1)^3} = 3 \ln(4) + \frac{1}{3} \sqrt{1^3} = 3 \ln(4) + \frac{1}{3}$$

Par soustraction ($V = V(4) - V(0)$) :

$$V = (3 \ln(20) + 9) - \left(3 \ln(4) + \frac{1}{3}\right) = 3 (\ln(20) - \ln(4)) + 9 - \frac{1}{3}$$

En utilisant la propriété $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, il vient :

$$V = 3 \ln\left(\frac{20}{4}\right) + \frac{26}{3} = 3 \ln(5) + \frac{26}{3} \approx 3 \times 1,6094 + 8,6667 \approx 13,50 \text{ m}^3$$

2. Cinétique de séchage solaire du gombo

La quantité totale d'eau évaporée M est définie par l'intégrale :

$$M = \int_0^2 (3t + 1)e^{-2t} dt$$

Nous appliquons une méthode d'intégration par parties (IPP) en posant deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 2]$:

$$\begin{cases} u(t) = 3t + 1 \implies u'(t) = 3 \\ v'(t) = e^{-2t} \implies v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{cases}$$

D'après la formule de l'IPP $\left(\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\right)$:

$$M = \left[-\frac{1}{2}(3t + 1)e^{-2t}\right]_0^2 - \int_0^2 3 \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right) dt = \left[-\frac{1}{2}(3t + 1)e^{-2t}\right]_0^2 + \frac{3}{2} \int_0^2 e^{-2t} dt$$

Nous déterminons la primitive du terme restant :

$$\begin{aligned} M &= \left[-\frac{1}{2}(3t + 1)e^{-2t}\right]_0^2 + \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^2 \\ &= \left[e^{-2t} \left(-\frac{3}{2}t - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\right]_0^2 \\ M &= \left[e^{-2t} \left(-\frac{3}{2}t - \frac{5}{4}\right)\right]_0^2 \end{aligned}$$

Évaluons cette expression aux bornes définies :

- Borne supérieure ($t = 2$) : $e^{-2(2)} \left(-\frac{3}{2}(2) - \frac{5}{4}\right) = e^{-4} \left(-3 - \frac{5}{4}\right) = -\frac{17}{4}e^{-4}$
- Borne inférieure ($t = 0$) : $e^0 \left(0 - \frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{4}$

Nous calculons la différence finale :

$$M = -\frac{17}{4}e^{-4} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - \frac{17}{4}e^{-4} \approx 1,25 - 4,25 \times 0,0183 \approx 1,17 \text{ kg}$$

3. Suivi flash de dégradation des stocks de fourrage

On cherche à évaluer la perte de fourrage cumulée P (en kg) subie entre $t = 0$ et $t = 2$ heures, définie par

$$P = \int_0^2 \frac{t \cdot e^{t^2}}{(e^{t^2} + 1)^2} dt$$

Suivons scrupuleusement le changement de variable suggéré en posant : $u = e^{t^2} + 1$.

- Calcul de la différentielle du :

En dérivant u par rapport à la variable t , on obtient

$$\frac{du}{dt} = 2t \cdot e^{t^2}$$

ce qui implique :

$$du = 2t \cdot e^{t^2} dt \implies t \cdot e^{t^2} dt = \frac{1}{2} du$$

- Modification des bornes d'intégration :

- Pour $t = 0$, on a $u = e^{0^2} + 1 = 1 + 1 = 2$.
- Pour $t = 2$, on a $u = e^{2^2} + 1 = e^4 + 1$.

En substituant l'ensemble de ces termes au sein de l'intégrale originale, nous obtenons une forme simplifiée :

$$P = \int_2^{e^4+1} \frac{1}{2} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \int_2^{e^4+1} \frac{1}{u^2} du$$

Une primitive usuelle de la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ étant la fonction $u \mapsto -\frac{1}{u}$, on a :

$$P = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{u} \right]_2^{e^4+1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{e^4+1} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(e^4+1)} \approx 0,241 \text{ kg}$$

4. Cinétique d'assimilation des phosphates

- (a) Décomposition en éléments simples

On cherche à identifier deux constantes réelles a et b vérifiant l'identité rationnelle :

$$\frac{t+5}{(t+1)(t+3)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+3}$$

Appliquons la méthode des résidus (par masquage) :

- *Pour déterminer la constante a* : On multiplie l'ensemble de l'équation par le bloc $(t+1)$ puis on évalue l'égalité en la valeur de sa racine, soit en $t = -1$:

$$a = \left. \frac{t+5}{t+3} \right|_{t=-1} = \frac{-1+5}{-1+3} = \frac{4}{2} = 2$$

- *Pour déterminer la constante b* : On multiplie l'ensemble de l'équation par le bloc $(t+3)$ puis on évalue l'égalité en sa racine associée, soit en $t = -3$:

$$b = \left. \frac{t+5}{t+1} \right|_{t=-3} = \frac{-3+5}{-3+1} = \frac{2}{-2} = -1$$

Nous obtenons ainsi l'expression décomposée finale de la fonction de flux :

$$f(t) = \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t+3}$$

- (b) Calcul de la masse totale de phosphore assimilée F

À l'aide de la décomposition obtenue à la question précédente, l'évaluation de l'intégrale se ramène à l'intégration de deux formes de type $\frac{u'}{u}$:

$$F = \int_0^3 \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \left[2 \ln(t+1) - \ln(t+3) \right]_0^3$$

- *Évaluation à la borne supérieure ($t = 3$) :*

$$F(3) = 2\ln(3+1) - \ln(3+3) = 2\ln(4) - \ln(6)$$

- *Évaluation à la borne inférieure ($t = 0$) :*

$$F(0) = 2\ln(0+1) - \ln(0+3) = 2\ln(1) - \ln(3) = 0 - \ln(3) = -\ln(3)$$

En effectuant la soustraction réglementaire ($F = F(3) - F(0)$) :

$$F = (2\ln(4) - \ln(6)) - (-\ln(3)) = 2\ln(4) - \ln(6) + \ln(3)$$

Par application des propriétés de base de la fonction logarithme :

$$F = \ln(4^2) - \ln(6) + \ln(3) = \ln(16) + \ln(3) - \ln(6) = \ln\left(\frac{16 \times 3}{6}\right) = \ln\left(\frac{48}{6}\right) = \ln(8)$$

Il est également possible de simplifier cette valeur sous la forme remarquable suivante :

$$F = \ln(2^3) = 3\ln(2) \approx 3 \times 0,6931 \approx 2,08 \text{ mg}$$
