Examen de mathématiques

Lundi 25 mai 2026

Promotion 116

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non   Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

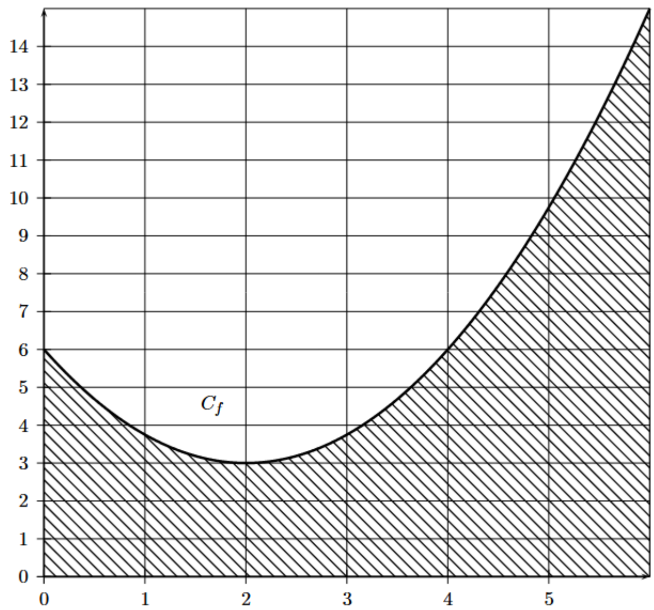
- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$$

La courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ ci-dessous est représentative de f dans un repère orthonormal du plan d'origine O. La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d' équation $x = 6$.



1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.

   En déduire l'aire en cm^2 sachant que 1 unité a pour mesure 2 cm en abscisses et $0,75$ cm en ordonnées

2. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;6]$ et la représenter sur le graphique.

   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ est donnée par l'expression :

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

3. On considère un point M appartenant à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ d'abscisse x avec $x \in [0;6]$.

   - La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H.
   - La droite parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K.
   - On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle $OHMK$

   Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;6]$,

$$R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$$

4. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0;6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle $OHMK$ soit égale à l'aire hachurée S.

   (a) Montrer que ce problème revient à résoudre l'équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par :

$$g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36.$$

   (b) Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0;6]$ et dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0;6]$ une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α au centième.

Correction ▼ [10.0024]

Exercice 2 Optimisation d'un périmètre de production de manguiers

Dans le cadre d'un projet de développement, vous devez modéliser les flux de nutriments et d'eau nécessaires à une plantation de manguiers de 10 hectares. L'analyse repose sur le calcul des apports hydriques et de la rétention des engrais.

1. **Cinétique d'irrigation**

   L'apport en eau lors d'un cycle d'irrigation est piloté par une pompe dont le débit $d(t)$ (en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}$) évolue sur 4 heures selon la fonction suivante :

$$d(t) = \frac{5t^2 + 14t + 13}{(t+1)(t^2+4t+5)}$$

   (a) **Décomposition :** Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples de la forme :

$$\frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2+4t+5}$$

   (b) **Calcul de volume :** En remarquant que $t^2 + 4t + 5 = (t+2)^2 + 1$, calculer le volume total d'eau V (en m^3) consommé par les manguiers entre $t = 0$ et $t = 4$ heures.

$$V = \int_0^4 d(t)\ dt$$

2. **Diffusion des engrais potassiques (Double IPP)** Pour favoriser la croissance des manguiers, un engrais liquide est utilisé. En raison des cycles de pompage, la masse de potassium $m(t)$ (en kg · h^{-1}) entrant dans le réseau d'irrigation présente des oscillations modélisées par :

$$m(t) = (t^2 + 1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

À l'aide de **deux intégrations par parties successives**, calculer la masse totale M de potassium distribuée durant les 2 premières heures ($t \in [0, 2]$) :

$$M = \int_0^2 m(t)\, dt$$

3. **Infiltration racinaire et saturation (Changement de variable)** L'efficacité de l'arrosage dépend de la profondeur de pénétration x (en mètres). L'indice de saturation du sol J dans la zone racinaire du manguier est donné par l'intégrale :

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^7}{(x^2+1)^3}\, dx$$

Calculer la valeur exacte de J en effectuant le **changement de variable** $u = x^2 + 1$

4. **Synthèse technique**

   (a) À partir du résultat de la question 1, déterminez le débit moyen d'irrigation sur les 4 heures.

   (b) En tant qu'ingénieur, expliquez pourquoi la présence d'un terme en Arctan dans le modèle de débit (1) indique une stabilisation progressive du flux plutôt qu'une croissance infinie.

Correction ▼ [10.0025]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Calcul de l'aire S

   La fonction f est continue et strictement positive sur l'intervalle $[0;6]$. En effet, son discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times \frac{3}{4} \times 6 = 9 - 18 = -9 < 0$, et son coefficient dominant $\frac{3}{4} > 0$. L'aire S de la partie hachurée sous la courbe est donc donnée par l'intégrale :

   $$S = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3x + 6\right) dx$$

   Déterminons d'abord une fonction primitive F de f sur $[0;6]$:

   $$F(x) = \frac{3}{4} \times \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 6x = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$$

   Calculons maintenant la valeur de l'intégrale :

   $$S = \left[\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x\right]_0^6$$

   $$S = \left(\frac{1}{4}(6)^3 - \frac{3}{2}(6)^2 + 6(6)\right) - (0)$$

   $$S = \left(\frac{216}{4} - \frac{3 \times 36}{2} + 36\right) = 54 - 54 + 36 = \mathbf{36} \text{ u.a.}$$

   Conversion en cm^2 :
   Une unité d'aire (1 u.a.) correspond au produit des échelles des axes, soit :

   $$1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm} \times 0{,}75 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ cm}^2$$

   L'aire S exprimée en centimètres carrés est donc :

   $$S_{\text{cm}^2} = 36 \times 1{,}5 = \mathbf{54} \text{ cm}^2$$

2. Calcul de la valeur moyenne de f

   D'après la formule du cours rappelée dans l'énoncé, la valeur moyenne $\overline{f}$ sur l'intervalle $[0;6]$ est :

   $$\overline{f} = \frac{1}{6-0}\int_0^6 f(x)\,dx = \frac{1}{6} \times S$$

   En remplaçant S par la valeur trouvée à la question précédente :

   $$\overline{f} = \frac{1}{6} \times 36 = \mathbf{6}$$

   Interprétation graphique : La valeur moyenne $\overline{f} = 6$ se représente graphiquement par une droite horizontale d'équation $y = 6$. L'aire du rectangle de base $[0;6]$ et de hauteur $\overline{f} = 6$ est rigoureusement égale à l'aire hachurée $S = 36$.

3. Aire du rectangle $OHMK$

   Le point M appartient à la courbe $(\mathcal{C}_f)$, ses coordonnées sont donc $(x\,;\,f(x))$. Le rectangle $OHMK$ a pour base la longueur $OH = x$ et pour hauteur la longueur $OK = f(x)$ (car $f(x) \geq 0$ sur $[0;6]$).

   L'aire $R(x)$ du rectangle est donnée par :

   $$R(x) = OH \times OK = x \times f(x)$$

   $$R(x) = x\left(\frac{3}{4}x^2 - 3x + 6\right)$$

   En développant l'expression, sachant que $\frac{3}{4} = 0{,}75$, on obtient bien pour tout $x \in [0;6]$:

   $$R(x) = 0{,}75x^3 - 3x^2 + 6x$$

4. Égalité des aires et recherche de solutions

   (a) Modélisation du problème :
   On cherche à résoudre $R(x) = S$ sur $[0;6]$. D'après les questions précédentes, cela équivaut à :

   $$0{,}75x^3 - 3x^2 + 6x = 36 \implies 0{,}75x^3 - 3x^2 + 6x - 36 = 0$$

   Ce problème revient donc exactement à résoudre l'équation $g(x) = 0$ où :

   $$g(x) = 0{,}75x^3 - 3x^2 + 6x - 36$$

   (b) Étude des variations de g et résolution :
   La fonction g est polynomiale, donc dérivable sur $[0;6]$. Sa fonction dérivée g' est :

   $$g'(x) = 0{,}75 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 6 = 2{,}25x^2 - 6x + 6$$

   Étudions le signe de $g'(x)$ en calculant son discriminant Δ :

   $$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2{,}25 \times 6 = 36 - 54 = -18$$

   Puisque $\Delta < 0$, la dérivée $g'(x)$ ne s'annule pas et conserve un signe constant, qui est celui de son coefficient devant x^2 $(2{,}25 > 0)$. Ainsi, pour tout $x \in [0;6]$, $g'(x) > 0$. La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;6]$.

   Calcul des valeurs aux bornes :

   - $g(0) = 0 - 0 + 0 - 36 = -36$
   - $g(6) = 0{,}75(6)^3 - 3(6)^2 + 6(6) - 36 = 0{,}75(216) - 3(36) + 36 - 36 = 162 - 108 = 54$

   - La fonction g est continue sur $[0;6]$.
   - Elle est strictement croissante sur $[0;6]$.
   - Le nombre 0 est compris entre $g(0) = -36$ et $g(6) = 54$.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;6]$.

   Approximation de la solution α :
   Par balayage successif à la calculatrice :

   - $g(5) = 0{,}75(125) - 3(25) + 6(5) - 36 = 93{,}75 - 75 + 30 - 36 = 12{,}75 > 0$, donc $4 < \alpha < 5$.
   - $g(4) = 0{,}75(64) - 3(16) + 6(4) - 36 = 48 - 48 + 24 - 36 = -12 < 0$.
   - $g(4{,}46) \approx -0{,}137$ et $g(4{,}47) \approx 0{,}101$.

   On en déduit l'arrondi au centième : $\alpha \approx 4{,}46$.
   Conclusion géométrique : L'aire du rectangle $OHMK$ est égale à l'aire sous la courbe pour une unique position du point M, située à une abscisse $x \approx 4{,}46$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Cinétique d'irrigation

   (a) Décomposition en éléments simples : On cherche les réels a, b et c tels que :

   $$\frac{5t^2 + 14t + 13}{(t+1)(t^2 + 4t + 5)} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt + c}{t^2 + 4t + 5}$$

   - Calcul de a : On multiplie l'équation par $(t+1)$ puis on pose $t = -1$:

   $$a = \left.\frac{5t^2 + 14t + 13}{t^2 + 4t + 5}\right|_{t=-1} = \frac{5(-1)^2 + 14(-1) + 13}{(-1)^2 + 4(-1) + 5} = \frac{5 - 14 + 13}{1 - 4 + 5} = \frac{4}{2} = 2$$

- Calcul de b et c : En remettant au même dénominateur le membre de droite :
$$\frac{2(t^2+4t+5)+(bt+c)(t+1)}{(t+1)(t^2+4t+5)} = \frac{(2+b)t^2+(8+b+c)t+(10+c)}{(t+1)(t^2+4t+5)}$$
Par identification des coefficients du numérateur avec $5t^2+14t+13$, on résout :
$$\begin{cases} 2+b=5 \implies b=3 \\ 10+c=13 \implies c=3 \end{cases}$$
Vérification sur le terme linéaire : $8+b+c=8+3+3=14$, ce qui est cohérent.

L'expression décomposée du débit est donc :
$$d(t) = \frac{2}{t+1} + \frac{3t+3}{t^2+4t+5}$$

(b) Calcul du volume total d'eau V :
Ajustons le second terme pour faire apparaître la dérivée du dénominateur $(t^2+4t+5)' = 2t+4$:
$$3t+3 = \frac{3}{2}(2t+2) = \frac{3}{2}(2t+4-2) = \frac{3}{2}(2t+4) - 3$$
On réécrit alors l'intégrale :
$$d(t) = \frac{2}{t+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2t+4}{t^2+4t+5} - \frac{3}{(t+2)^2+1}$$
Par intégration directe, les primitives se composent de logarithmes et d'une fonction arc-tangente :
$$V = \left[2\ln(t+1) + \frac{3}{2}\ln(t^2+4t+5) - 3\operatorname{Arctan}(t+2)\right]_0^4$$
Évaluons en la borne supérieure $t=4$:
$$V(4) = 2\ln(5) + \frac{3}{2}\ln(37) - 3\operatorname{Arctan}(6)$$
Évaluons en la borne inférieure $t=0$:
$$V(0) = 2\ln(1) + \frac{3}{2}\ln(5) - 3\operatorname{Arctan}(2) = \frac{3}{2}\ln(5) - 3\operatorname{Arctan}(2)$$
Calculons la différence $V = V(4) - V(0)$:
$$V = \left(2-\frac{3}{2}\right)\ln(5) + \frac{3}{2}\ln(37) - 3\operatorname{Arctan}(6) + 3\operatorname{Arctan}(2)$$
$$V = \frac{1}{2}\ln(5) + \frac{3}{2}\ln(37) - 3\operatorname{Arctan}(6) + 3\operatorname{Arctan}(2) \approx 6{,}29 \text{ m}^3$$

2. Diffusion des engrais potassiques (Double IPP)
On cherche à intégrer
$$M = \int_0^2 (t^2+1)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

- Première intégration par parties :
Posons $\begin{cases} u_1(t) = t^2+1 \implies u_1'(t) = 2t \\ v_1'(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \implies v_1(t) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$
$$M = \left[\frac{2}{\pi}(t^2+1)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{4}{\pi}t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$$
Comme $\sin(\pi)=0$ et $\sin(0)=0$, le terme entre crochets s'annule complètement. Il reste :
$$M = -\frac{4}{\pi}\int_0^2 t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

- Seconde intégration par parties :

  Posons $\begin{cases} u_2(t) = t \implies u_2'(t) = 1 \\ v_2'(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \implies v_2(t) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$

$$M = -\frac{4}{\pi}\left(\left[-\frac{2}{\pi}t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt\right)$$

$$M = -\frac{4}{\pi}\left(\left(-\frac{4}{\pi}\cos(\pi) - 0\right) + \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2\right)$$

  Sachant que $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$:

$$M = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{4}{\pi} + 0\right) = -\frac{16}{\pi^2} \approx -1{,}62 \text{ kg}$$

Note d'interprétation : La valeur négative indique simplement que le flux net d'oscillation modélisé compense négativement l'apport sur cet intervalle spécifique en raison du déphasage du pompage.

3. Infiltration racinaire et saturation (Changement de variable)

   Soit l'intégrale

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^7}{(x^2+1)^3}\,dx$$

   Effectuons le changement de variable $u = x^2 + 1 \implies dx = \dfrac{du}{2x}$. On a également $x^2 = u - 1$. Le numérateur s'exprime par : $x^7\,dx = x^6 \cdot (x\,dx) = (x^2)^3 \cdot \dfrac{du}{2} = \dfrac{(u-1)^3}{2}\,du$.

   - Changement des bornes :
     Si $x = 0 \implies u = 1$. Si $x = \sqrt{3} \implies u = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4$.
   - Substitution dans l'intégrale :

$$J = \int_1^4 \frac{\frac{1}{2}(u-1)^3}{u^3}\,du = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^3}\,du$$

$$J = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(1 - \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right)du$$

$$J = \frac{1}{2}\left[u - 3\ln(u) - \frac{3}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^4$$

   Évaluons aux bornes :

$$\text{En } u = 4 : \quad 4 - 3\ln(4) - \frac{3}{4} + \frac{1}{32} = \frac{105}{32} - 6\ln(2)$$

$$\text{En } u = 1 : \quad 1 - 3\ln(1) - 3 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

   Calculons la différence finale :

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{105}{32} - 6\ln(2) - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{153}{32} - 6\ln(2)\right) = \frac{153}{64} - 3\ln(2) \approx 0{,}311$$

4. Synthèse technique

   (a) Débit moyen d'irrigation :
   La valeur moyenne du débit sur la période $[0,4]$ est donnée par $\overline{d} = \frac{V}{4-0}$.

$$\overline{d} = \frac{6{,}29}{4} \approx 1{,}57 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

(b) Interprétation de la présence du terme en Arctan :
En analyse des limites, lorsque le temps t augmente vers l'infini, la fonction arc-tangente ne croît pas indéfiniment mais tend vers une asymptote horizontale stricte égale à $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$$

.
Pour l'ingénieur, l'intégration de ce terme montre que le système de pompage ne subit pas d'emballement cinétique. Le débit atteint un régime de transition stable (un palier de saturation), ce qui est représentatif du comportement physique réel d'une pompe agricole bridée par ses pertes de charge et sa puissance nominale maximale.
