Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Examen de mathématiques

Lundi 23 mars 2026

Promotion 116

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non   Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1

1. Soient les nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 3i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.
   (a) Déterminer la forme algébrique de $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
   (b) Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.
   (c) En déduire la forme exponentielle de z_1 et z_2.
   (d) Donner la forme exponentielle puis trigonométrique de Z.
   (e) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante
$$z^2 - (3+i)z + (4+3i) = 0$$

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$$a = -1 + i, \quad b = 2 + i \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{2} + i\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$
   (a) Placer les points A et B dans le plan.
   (b) Calculer les distances AB, AC et BC.
   On rappelle que la distance entre deux points correspond au module de la différence de leurs affixes.
   (c) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

(d) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Pour que $ABDC$ soit un parallélogramme, on rappelle qu'il faut que les vecteurs AB et CD soient égaux (c'est-à-dire $AB = CD$), ce qui se traduit par l'égalité d'affixes : $z_B - z_A = z_D - z_C$.

(e) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - a| = 3$. Identifier et tracer cet ensemble.

4. Modélisation d'un cycle de croissance **(Bonus)**

Dans une étude sur la croissance d'une micro-algue en bassin, on modélise l'évolution de la biomasse en fonction de cycles lumineux. On utilise un nombre complexe Z pour représenter à la fois l'amplitude de croissance et le déphasage par rapport au cycle solaire.

On considère l'indicateur complexe suivant :

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$$

(a) Calculer la forme algébrique de Z.

(b) Le rendement de photosynthèse est associé au module $|Z|$.

i. Calculer $|Z|$.

ii. Un rendement optimal est atteint si $|Z| > 1,2$. Est-ce le cas ici ?

(c) Le déphasage de la croissance par rapport au zénith solaire correspond à l'argument θ de Z.

i. Déterminer la forme exponentielle de $1 + i\sqrt{3}$ et de $1 + i$.

ii. Donner la valeur de l'argument θ en radians et la forme exponentielle de Z.

(d) Si le déphasage θ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{6}$, la culture est dite synchrone. Cette culture est-elle synchrone ?

Correction ▼ [14.0127]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Formes algébriques et trigonométriques

   a) **Forme algébrique de Z :** On multiplie par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$Z = \frac{3+3i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(3+3i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{3+3i\sqrt{3}+3i-3\sqrt{3}}{1^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$Z = \frac{3-3\sqrt{3}+i(3+3\sqrt{3})}{4} = \frac{3(1-\sqrt{3})}{4} + i\frac{3(1+\sqrt{3})}{4}$$

   b) **Modules et arguments :**

   - $|z_1| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = \mathbf{3\sqrt{2}}$. $\cos\theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
   - $|z_2| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$. $\cos\theta_2 = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

   c) **Formes exponentielles :**

$$z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

   d) **Forme exponentielle et trigonométrique de Z :**

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

   Forme trigonométrique : $Z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

   e) **Valeurs exactes :** Par identification des parties réelles et imaginaires entre la question (a) et (d) :

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{3(1-\sqrt{3})}{4} \Longrightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{4} \Longrightarrow \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2. Équation du second degré

   Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = (-(3+i))^2 - 4(4+3i) = (9+6i-1) - 16 - 12i = \mathbf{-8-6i}$$

   Cherchons $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Le système donne : $x^2-y^2 = -8$, $x^2+y^2 = \sqrt{(-8)^2+(-6)^2} = 10$ et $2xy = -6$. On trouve $2x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm 1$ et $2y^2 = 18 \Longrightarrow y = \pm 3$. Comme $xy < 0$, on prend $\delta = 1-3i$. Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{3+i-(1-3i)}{2} = \mathbf{1+2i} \quad ; \quad z_2 = \frac{3+i+(1-3i)}{2} = 2-i$$

3. Géométrie

   a) *(Placer les points $A(-1,1)$ et $B(2,1)$ dans un repère).*

   b) **Distances :** $AB = |b-a| = |3| = \mathbf{3}$.
   $AC = |c-a| = |\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}} = \sqrt{9} = \mathbf{3}$.
   $BC = |c-b| = |-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}} = \mathbf{3}$.

   c) $AB = AC = BC = 3$, donc le triangle ABC est **équilatéral**.

   d) $ABDC$ est un parallélogramme ssi $\vec{AB} = \vec{CD}$, soit $b-a = d-c$.
   $d = b-a+c = 3+\frac{1}{2}+i(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}) = \mathbf{\frac{7}{2}+i(1+\frac{3\sqrt{3}}{2})}$.

e) $|z-a|=3$ définit l'ensemble des points situés à une distance 3 de A. C'est le **cercle de centre** A **et de rayon** 3.

4. Modélisation (Bonus)

a) $Z=\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}+\mathbf{i}\,\mathbf{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$.

b) $|Z|=\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1+i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{2}}\approx 1,41$. Comme $1,41>1,2$, le rendement est **optimal**.

c) Formes exponentielles : $1+i\sqrt{3}=\mathbf{2e^{i\frac{ß}{3}}}$ et $1+i=\mathbf{\sqrt{2}e^{i\frac{ß}{4}}}$. $Z=\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}=\mathbf{\sqrt{2}e^{i\frac{ß}{12}}}$. L'argument θ est $\mathbf{\frac{ß}{12}}$ rad.

d) $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{6}$, donc la culture est **synchrone**.
