

# Examen de mathématiques

Mardi 3 mars 2026

Promotion 116

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) :  Oui  Non

Calculatrice autorisée :  Oui  Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

## Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $a = i$ ,  $b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  et  $c = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ .

1. Donner une forme trigonométrique des nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
2. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
3. On pose :  $z = \frac{c - b}{a - b}$ .
  - (a) Déterminer  $|z|$  et  $\arg(z)$ .
  - (b) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que :

$$|z - i| = \left| z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right|$$

Correction ▼

[14.0124]

## Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{2}(-1 + i)$  et  $c = \sqrt{2}(-1 - i)$ . On définit un quatrième point, noté  $E$ , d'affixe  $e$  le milieu du segment  $[AB]$ .

1. Donner une forme trigonométrique des nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
2. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

3. Montrer que le triangle  $OAB$  est isocèle, puis déduire une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{OE})$ .
4. Déterminer  $e$  puis  $|e|$ .
5. Déduire :  $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ .

Correction ▼

[14.0125]

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soient les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$a = i, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

1. La forme trigonométrique d'un nombre complexe  $z$  est donnée par

$$r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z) [2\pi]$ .

- Pour  $a = i$  :  $|a| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ . Le point  $A$  est sur l'axe des ordonnées positives, donc :

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

- Pour  $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  :  $|b| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ . On cherche  $\theta_b$  tel que  $\cos \theta_b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \theta_b = \frac{1}{2}$ .

$$b = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

- Pour  $c = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$  : On remarque que  $c = \bar{b}$ . Le module est identique ( $|c| = 1$ ) et l'argument est l'opposé.

$$c = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

2. Les points  $A, B$  et  $C$  ont tous un module égal à 1, ils appartiennent donc au cercle trigonométrique de centre  $O$  et de rayon 1.

3. Calculons d'abord les affixes des vecteurs  $\vec{BC}$  et  $\vec{BA}$  :

- $c - b = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -i$

- $a - b = i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

**Calcul du module :**

$$|z| = \frac{|c - b|}{|a - b|} = \frac{|-i|}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

**Calcul de l'argument :**

$$\arg(z) = \arg(c - b) - \arg(a - b) [2\pi]$$

donc

$$\arg(c - b) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arg(a - b) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{6}$$

d'où

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

L'équation est :

$$|z - i| = \left|z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right|$$

On remarque que l'on peut écrire l'égalité comme :

$$|z - a| = |z - b|$$

Ce qui est équivalent à la relation de distance :

$$AM = BM$$

L'ensemble des points  $M$  est donc la **médiatrice du segment**  $[AB]$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On donne :  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{2}(-1 + i) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$  et  $c = \sqrt{2}(-1 - i) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ .

1. • **Pour**  $a = 2$  : Le module est  $|a| = 2$ . Comme  $a$  est un réel positif, son argument est  $0 \pmod{2\pi}$ .

$$a = 2(\cos 0 + i \sin 0)$$

- **Pour**  $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$  : Calcul du module :  $|b| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$ . On cherche  $\theta$  tel que :
- $$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies \theta = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

$$b = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

- **Pour**  $c = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$  : On remarque que  $c = \bar{b}$ . Le module est le même ( $|c| = 2$ ) et l'argument est l'opposé.

$$c = 2 \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

2. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont situés sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 2.  $A$  est sur l'axe des réels,  $B$  est sur la deuxième bissectrice et  $C$  est le symétrique de  $B$  par rapport à l'axe des réels.
3. **Nature du triangle**  $OAB$  : On a  $|a| = OA = 2$  et  $|b| = OB = 2$ . Comme  $OA = OB$ , le triangle  $OAB$  est **isocèle en**  $O$ .

**Angle orienté**  $(\vec{u}, \vec{OE})$  :  $E$  est le milieu de  $[AB]$ . Dans un triangle isocèle en  $O$ , la médiane issue du sommet principal est aussi la bissectrice de l'angle au sommet. L'angle  $(\vec{u}, \vec{OA}) = 0$  et  $(\vec{u}, \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ . L'angle  $(\vec{u}, \vec{OE})$  est la moyenne des deux arguments :

$$(\vec{u}, \vec{OE}) = \frac{0 + \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8} \pmod{2\pi}$$

4. **Calcul de**  $e$  :  $e = \frac{a+b}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Calcul de**  $|e|$  : Dans le triangle  $OAE$  rectangle en  $E$  (car la médiane est aussi hauteur), on a :  $|e| = OE = OA \times \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ . Cependant, il est plus simple d'utiliser la forme algébrique :  $|e|^2 = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{4} = 2 - \sqrt{2}$ . D'où  $|e| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .

5. On sait que  $e = |e|(\cos \theta_e + i \sin \theta_e)$  avec  $\theta_e = \frac{3\pi}{8}$ . Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\operatorname{Re}(e)}{|e|} = \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\operatorname{Im}(e)}{|e|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$