

Examen de mathématiques

Jeudi 22 mai 2025

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non

Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x) + x.e}{x^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{\ln(t)}{t^2} \right) dt \quad \text{et} \quad A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x) dx$$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le résultat suivant

$$A_n = I_n + e$$

3. Calculer I_0 et A_0 .
4. Calculer la limite de la suite (A_n) .

[10.0018]

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^2 5x^3 dx$

2. $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$

3. $I_3 = \int_{-1}^1 x^2 (x^3 + 3)^2 dx$

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_4 = \int_0^1 x e^{2x} dx$

[10.0019]