Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Examen de mathématiques

Lundi 31 mars 2025

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non   Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer la limite de f en 0. On admettra les limites en $\pm\infty$,
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$
4. Calculer la dérivée de f.
5. Etablir le tableau de variation de la fonction f.
6. Tracer la courbe représentative de f.

Correction ▼ [07.0014]

Exercice 2

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude I le plus petit possible. On justifiera ce choix.

3. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle
$$J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
4. Calculer les limites de f aux bornes de J.
5. Calculer la dérivée de f.
6. Etablir le tableau de variation de la fonction f.
7. Tracer la courbe représentative de f.

Correction ▼ [07.0015]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Le domaine de définition de la fonction f est $D = \mathbb{R}^*$.

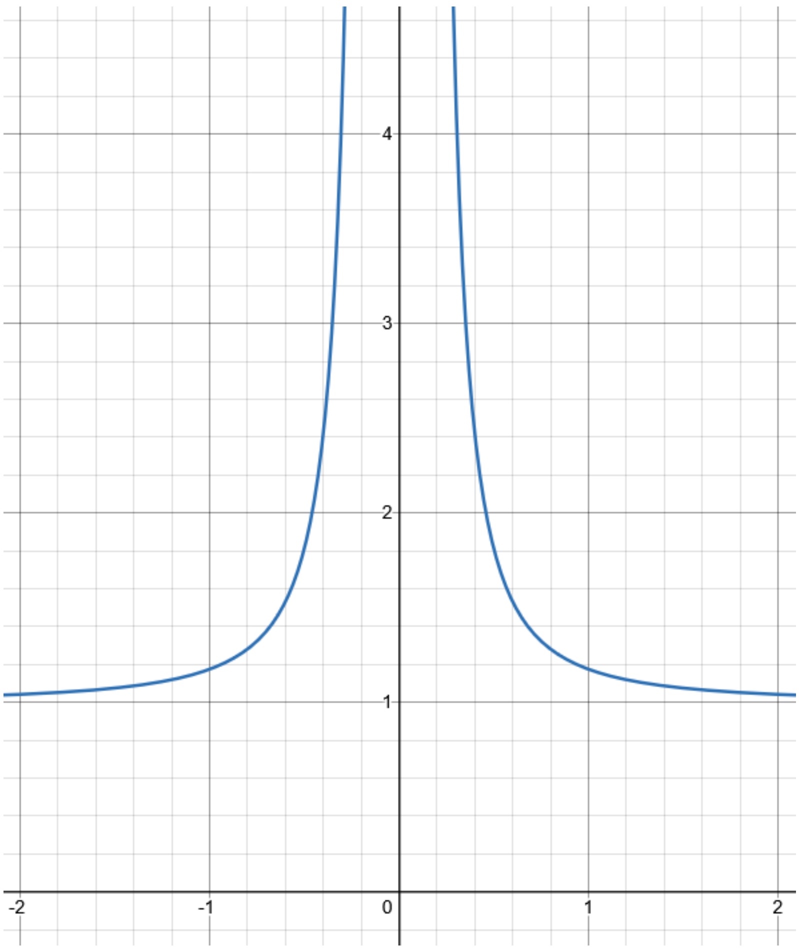
2. On a
$$f(-x) = -x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = -x\frac{e^{-1/x} - e^{1/x}}{2} = x\frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{2} = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$
On peut donc affirmer que la fonction f est paire.

3. On a par croissance comparée, $xe^{1/x} \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$, alors que $xe^{-1/x} \to 0$ quand $x \to 0^+$. On en déduit alors que
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

4. La dérivée, obtenue par la formule de dérivation d'une composée, vaut :
$$f'(x) = \sinh(1/x) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \cosh(1/x) = \cosh(1/x)(\mathrm{th}(1/x) - 1/x)$$

5. On peut commencer par étudier la fonction auxiliaire $g(y) = \mathrm{th}(y) - y$, avec $y = 1/x$. Sa dérivée vaut
$$g'(y) = \left(1 - \mathrm{th}^2(y)\right) - 1 = -\,\mathrm{th}^2(y) \leq 0$$
g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$, et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $g(y) \leq 0$ pour tout $y \geq 0$. On en déduit que f' est négative sur $]0, +\infty[$, et donc que f est décroissante sur cet intervalle.

6. On a



Tournez la page S.V.P.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La fonction f est définie partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tout les x avec $\sin x \neq -1$. Le domaine de définition de f est donc
$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. La fonctiion f n'est ni paire, ni impaire, elle est par contre 2π périodique. On a
$$I = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$
Un intervalle d'amplitude 2π est suffisant pour avoir une répétition complete de la courbe de f.

3. On a $\sin(\pi - x) = \sin x$. On en déduit que $f(\pi - x) = f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x = \pi/2$ est un axe de symétrie pour la courbe de f. On peut donc se restreindre à l'intervalle
$$J = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

4. On a
$$\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$$
de plus
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} 1 + \sin(x) = 0^+$$
donc
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$$

5. On a
$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$$

6. Donc on trouve que f est croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

7. On a