Ecole supérieure d'agro-développement international

istom

Examen de mathématiques

Mardi 24 novembre 2026

Promotion 117

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1 Coût moyen et efficience d'une coopérative cacaoyère

Dans l'Ouest camerounais, une coopérative produit du cacao. On note x la quantité produite en une année, exprimée en tonnes ($x \geq 0$). Le coût total de production correspondant, en millions de francs CFA, est modélisé par

$$C(x) = x^2 + 4x + 16.$$

Partie A : Le coût total *(mise en route)*.
On étudie la fonction C sur $[0, +\infty[$.

1. Calculer $C(0)$ et interpréter cette valeur.
2. Vérifier que, pour tout réel x, $C(x) = (x+2)^2 + 12$. En déduire que $C(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.
3. Calculer $C'(x)$, puis déterminer son signe sur $[0, +\infty[$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x)$.
5. Dresser le tableau de variations de C sur $[0, +\infty[$.

Rappels (utiles dans la suite).

- **Asymptote.** La droite verticale $x = x_0$ est asymptote à la courbe d'une fonction f lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$. La droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$; elle est *horizontale* si $a = 0$, *oblique* si $a \neq 0$.
- **Prolongement par continuité.** Si f n'est pas définie en x_0 mais que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ avec ℓ *fini*, on peut prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$. Si la limite est infinie (ou n'existe pas), ce prolongement est *impossible*.

Partie B : Le coût moyen de production.

Le *coût moyen* par tonne est la fonction g définie, pour $x > 0$, par $g(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

6. Préciser l'ensemble de définition de g, puis montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = x + 4 + \dfrac{16}{x}$.

7. *(Limites, asymptote verticale et prolongement.)*
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) En déduire, à l'aide du rappel, que la courbe de g admet une asymptote verticale, dont on précisera l'équation.
   (c) La limite de g en 0^+ est-elle *finie* ? En déduire, à l'aide du rappel, si g admet un prolongement par continuité en 0.

8. *(Continuité et asymptote oblique.)*
   (a) Justifier que g est continue sur $]0,+\infty[$.
   (b) Calculer $g(x) - (x+4)$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(g(x) - (x+4)\big)$.
   (c) En déduire, à l'aide du rappel, que la droite D d'équation $y = x + 4$ est asymptote (oblique) à la courbe de g en $+\infty$.

9. Justifier que g est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{(x-4)(x+4)}{x^2}$.

10. Dresser le tableau de variations de g sur $]0,+\infty[$. En déduire la quantité de cacao qui rend le coût moyen minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

Partie C : Un indice d'efficience.
Les agronomes évaluent l'efficience de la coopérative par la fonction e définie, pour $x \geq 0$, par

$$e(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}.$$

11. Justifier que e est définie et continue sur $[0,+\infty[$, puis calculer $e(0)$.

12. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} e(x)$ en levant la forme indéterminée (on pourra factoriser x^2 sous la racine). En déduire, à l'aide du rappel, une asymptote de la courbe de e, et l'interpréter concrètement.

13. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $e'(x) = \dfrac{16}{(x^2+16)\sqrt{x^2+16}}$. En déduire le sens de variation de e.

14. Dresser le tableau de variations de e sur $[0,+\infty[$.

Partie D : Pour aller plus loin *(BONUS)*.

15. ($\star$) On pose $k(x) = \sqrt{x^2+16} - x$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ en multipliant par l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+16} + x$.

16. ($\star\star$) Montrer que l'équation $g(x) = 14$ admet exactement deux solutions dans $]0,+\infty[$ (on invoquera la continuité et le sens de variation de g), puis déterminer ces deux solutions.

17. ($\star\star\star$) À l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique ($a+b \geq 2\sqrt{ab}$ pour $a,b \geq 0$), montrer que $g(x) \geq 12$ pour tout $x > 0$, et préciser le cas d'égalité. Ce résultat est-il cohérent avec la question 10 ?

Indication ▼ Correction ▼ [11.0159]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Partie A.

1. Remplacez x par 0 dans $C(x)$.
2. Développez $(x+2)^2+12$ pour retrouver $C(x)$. Un carré est toujours ≥ 0.
3. $C'(x)=2x+4$; sur $[0,+\infty[$, ce nombre est-il positif ou négatif ?
4. Le terme dominant x^2 impose la limite.
5. C est croissante de $C(0)=16$ vers $+\infty$: reportez-le dans le tableau.

Partie B.

6. Le dénominateur x doit être non nul. Divisez $x^2+4x+16$ par x terme à terme.
7. *(a)* En 0^+ : $\dfrac{16}{x}\to+\infty$; en $+\infty$: $x\to+\infty$. *(b)* Une limite infinie en 0^+ donne, d'après le rappel, une asymptote verticale ($x=0$). *(c)* Cette limite n'est pas finie : d'après le rappel, pas de prolongement par continuité.
8. *(a)* g est un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. *(b)* $g(x)-(x+4)$ se simplifie en $\dfrac{16}{x}$, qui tend vers 0. *(c)* Une limite nulle de $g(x)-(x+4)$ donne, d'après le rappel, l'asymptote oblique $y=x+4$.
9. Avec $g(x)=x+4+16x^{-1}$, dérivez terme à terme (la constante 4 disparaît), réduisez au même dénominateur x^2, puis factorisez x^2-16.
10. Sur $]0,+\infty[$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x-4$ (car $x^2>0$ et $x+4>0$) : négatif puis positif. Le minimum est atteint là où g' s'annule.

Partie C.

11. $x^2+16>0$ pour tout x : la racine et le quotient sont toujours définis.
12. Pour $x>0$, $\sqrt{x^2+16}=x\sqrt{1+\dfrac{16}{x^2}}$; simplifiez $e(x)$, puis faites tendre $x\to+\infty$. Une limite finie donne, d'après le rappel, une asymptote horizontale.
13. Écrivez $e(x)=x\,(x^2+16)^{-1/2}$ et dérivez (produit + puissance), ou utilisez la formule du quotient : tout se simplifie et e' est strictement positive.
14. e croît de $e(0)$ vers sa limite en $+\infty$.

Partie D — bonus.

15. Multipliez et divisez par $\sqrt{x^2+16}+x$: le numérateur devient $(x^2+16)-x^2=16$.
16. g est continue et strictement monotone sur $]0,4]$ puis sur $[4,+\infty[$: appliquez le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle. Pour les valeurs exactes, résolvez $x+\dfrac{16}{x}=10$, soit $x^2-10x+16=0$.
17. Appliquez $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ à $a=x$ et $b=\dfrac{16}{x}$ (ne pas oublier le terme $+4$) ; l'égalité a lieu lorsque $a=b$.

Tournez la page S.V.P.

Correction de l'exercice 1 ▲

Partie A.

1. $C(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 16 = 16$. C'est le *coût fixe* : même en produisant 0 tonne, la coopérative dépense 16 millions de FCFA (amortissements, entretien, etc.).

2. Pour tout réel x, $(x+2)^2 + 12 = x^2 + 4x + 4 + 12 = x^2 + 4x + 16 = C(x)$. Comme $(x+2)^2 \geq 0$, on a $C(x) = (x+2)^2 + 12 \geq 12 > 0$: le coût total est strictement positif pour tout $x \geq 0$.

3. C est un polynôme, dérivable sur $[0, +\infty[$, et $C'(x) = 2x + 4$. Pour $x \geq 0$, $C'(x) = 2x + 4 \geq 4 > 0$: C' est strictement positive, donc C est strictement croissante.

4. Comme $C(x) = x^2 + 4x + 16$ a pour terme dominant x^2, $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x) = +\infty$.

5. C est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (question 3), avec $C(0) = 16$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x) = +\infty$: d'où le tableau de variations.

x	0		$+\infty$
$C'(x)$		$+$	
$C(x)$	16	↗	$+\infty$

Partie B.

6. Le quotient $\dfrac{C(x)}{x}$ est défini pour $x \neq 0$; comme on étudie $x > 0$, l'ensemble de définition est $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$,
$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 16}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{16}{x} = x + 4 + \frac{16}{x}.$$

7. (a) Quand $x \to 0^+$: $\dfrac{16}{x} \to +\infty$ (et $x + 4 \to 4$), donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$. Quand $x \to +\infty$: $x \to +\infty$ et $\dfrac{16}{x} \to 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ (limite infinie), le rappel donne : la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est **asymptote verticale** à la courbe de g.

   (c) La limite de g en 0^+ vaut $+\infty$: elle n'est *pas finie*. D'après le rappel, g **n'admet pas** de prolongement par continuité en 0.

8. (a) Sur $]0, +\infty[$, g est le quotient de la fonction continue $x \mapsto x^2 + 4x + 16$ par la fonction continue $x \mapsto x$, qui ne s'annule pas : g est donc **continue sur** $]0, +\infty[$.

   (b) Pour $x > 0$, $g(x) - (x+4) = \left(x + 4 + \dfrac{16}{x}\right) - (x+4) = \dfrac{16}{x}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{16}{x} = 0$.

   (c) Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x) - (x+4)\big) = 0$, le rappel donne : la droite $D : y = x + 4$ est asymptote *oblique* à la courbe de g en $+\infty$.

9. Somme et quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas), g y est dérivable, et
$$g'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}.$$

10. Sur $]0, +\infty[$ on a $x^2 > 0$ et $x + 4 > 0$: $g'(x)$ est donc du signe de $x - 4$. Ainsi $g' < 0$ sur $]0, 4[$, $g'(4) = 0$, $g' > 0$ sur $]4, +\infty[$.

x	0		4		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$

La fonction décroît puis croît : le coût moyen est **minimal pour** $x = 4$ **tonnes**, et vaut

$$g(4) = 4 + 4 + \frac{16}{4} = 12 \quad \text{millions de FCFA par tonne.}$$

Partie C.

11. Pour tout réel x, $x^2 + 16 > 0$, donc $\sqrt{x^2+16}$ existe et ne s'annule jamais : e est définie sur $[0, +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$). Comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul, e est **continue sur** $[0, +\infty[$. Enfin $e(0) = \dfrac{0}{\sqrt{16}} = 0$.

12. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+16} = \sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{16}{x^2}\right)} = x\sqrt{1+\dfrac{16}{x^2}}$, d'où

$$e(x) = \frac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{16}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{16}{x^2}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

La limite étant finie, le rappel donne une **asymptote horizontale** $y = 1$ en $+\infty$. Concrètement, l'efficience croît et *plafonne* : elle se rapproche de 1, soit 100 %, sans jamais l'atteindre.

13. Écrivons $e(x) = x\,(x^2+16)^{-1/2}$. Par dérivation d'un produit,

$$e'(x) = (x^2+16)^{-1/2} + x \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)(x^2+16)^{-3/2} \cdot 2x = (x^2+16)^{-3/2}\left[(x^2+16) - x^2\right] = \frac{16}{(x^2+16)^{3/2}},$$

c'est-à-dire $e'(x) = \dfrac{16}{(x^2+16)\sqrt{x^2+16}}$. Ce quotient est *strictement positif* pour tout $x \geq 0$, donc e est **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$e'(x)$	$+$		
$e(x)$	0	↗	1

Partie D — bonus.

15. On multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2+16} + x$ (strictement positive) :

$$k(x) = \left(\sqrt{x^2+16} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+16}+x}{\sqrt{x^2+16}+x} = \frac{(x^2+16) - x^2}{\sqrt{x^2+16}+x} = \frac{16}{\sqrt{x^2+16}+x}.$$

Quand $x \to +\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

16. D'après la question 10, g est continue et *strictement décroissante* sur $]0,4]$, où elle prend ses valeurs dans $[12,+\infty[$; comme $14 \in]12,+\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à une fonction strictement monotone) assure l'existence d'une *unique* solution dans $]0,4[$. De même g est continue et strictement croissante sur $[4,+\infty[$, à valeurs dans $[12,+\infty[$, d'où une *unique* solution dans $]4,+\infty[$. L'équation $g(x) = 14$ a donc **exactement deux solutions** sur $]0,+\infty[$.

    On les calcule : $g(x) = 14 \iff x + 4 + \dfrac{16}{x} = 14 \iff x + \dfrac{16}{x} = 10 \iff x^2 - 10x + 16 = 0 \iff (x-2)(x-8) = 0$, soit $x = 2$ ou $x = 8$ (l'une dans $]0,4[$, l'autre dans $]4,+\infty[$).

17. Pour $x > 0$, posons $a = x > 0$ et $b = \dfrac{16}{x} > 0$. L'inégalité arithmético-géométrique donne

$$x + \frac{16}{x} = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 2\sqrt{16} = 8,$$

    d'où $g(x) = x + 4 + \dfrac{16}{x} \geq 4 + 8 = 12$. L'égalité a lieu si et seulement si $a = b$, c'est-à-dire $x = \dfrac{16}{x}$, soit $x^2 = 16$, donc $x = 4$. On retrouve exactement le résultat de la question 10 : le minimum de g vaut 12 et est atteint en $x = 4$.
