

Examen de mathématiques

Vendredi 23 janvier 2026

Promotion 116

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non

Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1 Modélisation d'un indice de croissance végétale

On modélise l'évolution de l'**indice de croissance d'une culture** au cours de l'année par une fonction mathématique dépendant du temps. Le temps x est exprimé en radians et représente la saisonnalité climatique. On considère la fonction g par :

$$g(x) = \ln(1 + \sin^2(x)) - \frac{1}{2} \sin(4x)$$

La valeur $g(x)$ représente un **indice agronomique normalisé**. Ce modèle ne tient pas compte de tous les facteurs agronomiques (précipitations, type de sol, stade de développement de la plante), mais il est utile pour étudier un phénomène **saisonnier, borné et non linéaire**.

1. Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la périodicité de la fonction g .
3. Déterminer la parité de la fonction g .
4. En déduire un intervalle d'étude I adapté.
5. Calculer $g'(x)$ pour tout x où cela ne pose pas de problème.

Pour la suite de l'exercice, on considérera que la dérivée de g est donnée par :

$$g'(x) = \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1 + \sin^2(x)} - 2 \cos(4x)$$

6. Déterminer les valeurs et positions des maxima et minima de g sur une période complète.
7. Dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle I .
8. Déterminer les équations des tangentes à la courbe de g aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = \pi$.
9. Tracer le graphe de g sur une période complète.

[07.0078]