Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Examen de mathématiques

Jeudi 8 janvier 2026

Promotion 116

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☒ Oui ☐ Non   Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1 Modélisation mathématique d'un indicateur agronomique saisonnier

On modélise l'évolution d'un **indice de stress hydrique d'une culture** au cours de l'année par une fonction mathématique dépendant du temps. Le temps x est exprimé en radians et représente la saisonnalité climatique.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin^2(x) - \frac{1}{2}\right).$$

La valeur $f(x)$ représente un **indice agronomique normalisé**, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Ce modèle n'est pas réaliste au sens agronomique strict. En effet, le stress hydrique réel d'une culture dépend de nombreux facteurs tels que la réserve utile du sol, les précipitations, l'évapotranspiration, le type de sol et le stade de développement de la plante. Ces facteurs ne sont pas pris en compte ici.

Cependant, ce modèle est pertinent d'un point de vue conceptuel et pédagogique. Il permet de représenter un phénomène saisonnier, borné et non linéaire, caractéristiques fréquentes des processus agronomiques.

- La variable x représente le temps au cours de l'année (saisonnalité).
- La fonction $\sin(x)$ modélise l'influence du climat annuel (rayonnement solaire, température).
- La puissance $\sin^2(x)$ accentue les périodes extrêmes de l'année.
- L'expression $\sin^2(x) - \frac{1}{2}$ construit un indicateur variant entre deux valeurs.
- La fonction Arcsin permet d'obtenir un indice borné et d'introduire des variations rapides près des seuils.

Ainsi, le modèle traduit l'idée que le stress hydrique est faible une grande partie de l'année, mais peut évoluer rapidement lors de périodes critiques.

1. Montrer que la fonction f est définie et $\mathbb{R}$.
2. Etudier la périodicité de f. Déterminer la parité de f. En déduire un intervalle d'étude I.

3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée $f'(x)$ et l'exprimer sous la forme la plus simple possible.
4. Étudier le comportement de $f'(x)$ aux points où $\sin^2(x) - \frac{1}{2} = \pm 1$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.
6. Déterminer les maxima et minima de f sur une période.
7. Tracer le graphe de f sur deux périodes.
8. Montrer que
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
et utiliser l'identité ci-dessus pour réécrire $f(x)$.
9. **(BONUS)** Tenter une interprétation agronomique de cet exercice.

Correction ▼ [07.0061]

Correction de l'exercice 1 ▲

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin^2(x) - \frac{1}{2}\right).$$

1. **Domaine de définition**

   La fonction $\operatorname{Arcsin}(x)$ est définie si et seulement si x appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.

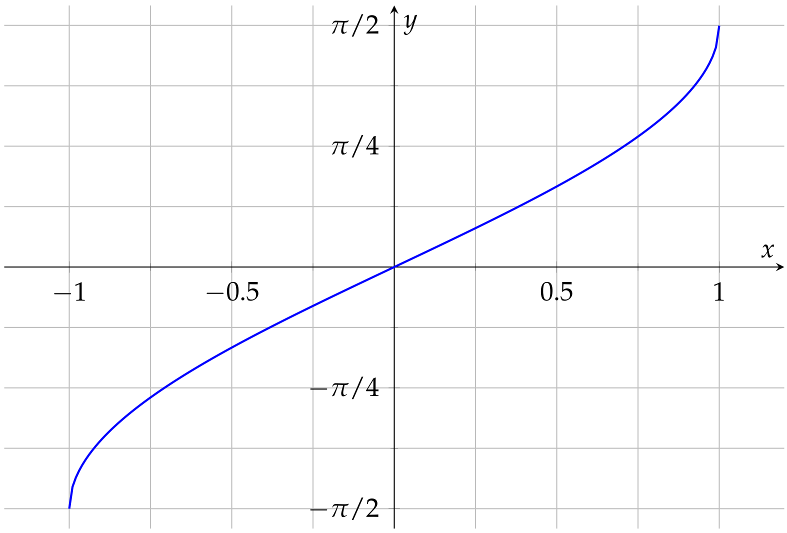

FIGURE 1 : Graphe de $y = \operatorname{Arcsin}(x)$ sur $[-1, 1]$

   Pour tout réel x, on a :

$$0 \leq \sin^2(x) \leq 1.$$

   Donc en soustrayant $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$-\frac{1}{2} \leq \sin^2(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

   Ainsi,

$$-1 \leq \sin^2(x) - \frac{1}{2} \leq 1$$

   Donc la fonction f est définie pour tout réel x.

$$\boxed{D = \mathbb{R}}$$

2. **Périodicité et parité**

   La fonction $\sin(x)$ est 2π-périodique, donc $\sin^2(x)$ l'est également. Cependant, cf. graphe 2, on voit que $\sin^2(x)$ semble avoir une période plus petite égale à π seulement.

   En effet on a

$$\sin^2(x + \pi) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x)$$

   On a utilisé le fait que $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, cf graphe 3.

   Par composition avec la fonction Arcsin, on en déduit que f est π-périodique.

$$f(x + \pi) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin^2(x + \pi) - \frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin^2(x) - \frac{1}{2}\right) = f(x).$$

   Étudions la parité :

$$f(-x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin^2(-x) - \frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin^2(x) - \frac{1}{2}\right) = f(x).$$

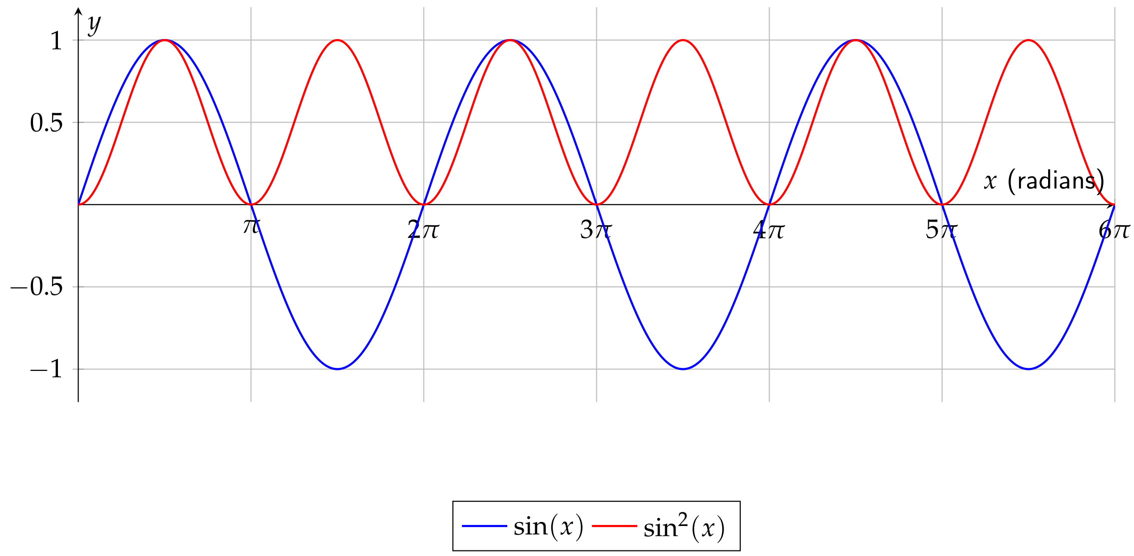

FIGURE 2 : Tracé de $\sin(x)$ et $\sin^2(x)$ pour $x \in [0, 6\pi]$

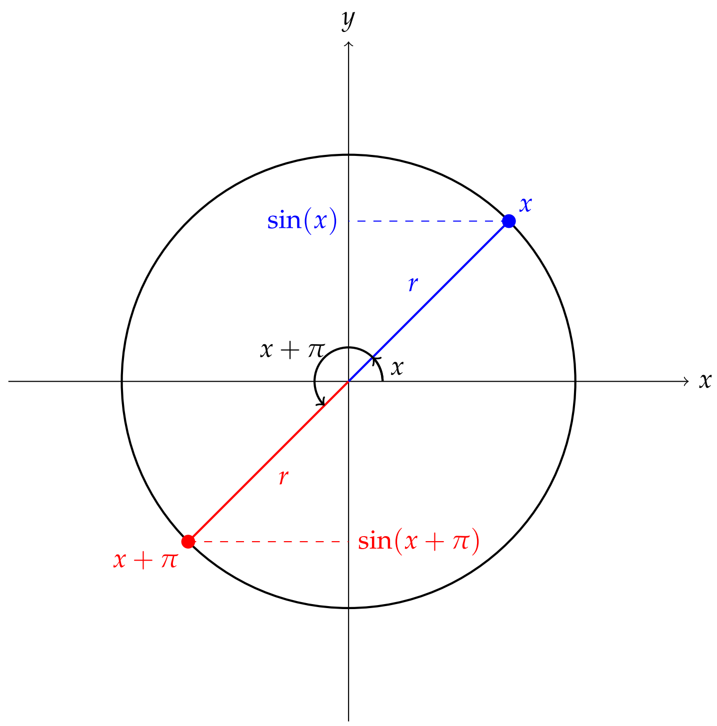

FIGURE 3 : Cercle trigonométrique illustrant que $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$.

La fonction f est donc paire.

$$\boxed{f \text{ est paire et } \pi\text{-périodique}}$$

On peut se limiter à l'étude sur l'intervalle :

$$\boxed{I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$$

3. **Calcul de la dérivée**

Posons
$$u(x) = \sin^2(x) - \frac{1}{2}.$$
Alors
$$f(x) = \text{Arcsin}(u(x)).$$
On a déja montré que $u(x)$ est bien compris entre 1 et -1, on peut donc dériver :
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}.$$
On calcule :
$$u'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x).$$
Ainsi,
$$\boxed{f'(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \left(\sin^2(x) - \frac{1}{2}\right)^2}}}$$

4. **Comportement aux points limites**

   On peut remarquer que l'identité
$$\sin^2(x) - \frac{1}{2} = \pm 1$$
   n'est jamais vérifiée. En effet, cela donne $\sin^2(x) = \frac{3}{2}$ et $\sin^2(x) = -\frac{1}{2}$ ce qui n'est pas possible !

   Donc sur I f' ne diverge pas.

5. **Tableau de variation sur I**

   Sur l'intervalle I, on a $\sin(2x) > 0$. Le dénominateur de $f'(x)$ étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $\sin(2x)$. Ainsi f est croissante sur I.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{6}$ $\nearrow$	$\frac{\pi}{6}$

6. **Maxima et minima**

   On calcule :
$$f(0) = \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6},$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$
$$f(\pi) = \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$
   Donc :
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Maximum : } \frac{\pi}{6} \text{ atteint pour } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \text{Minimum : } -\frac{\pi}{6} \text{ atteint pour } x = k\pi.\end{array}}$$

Tournez la page S.V.P.

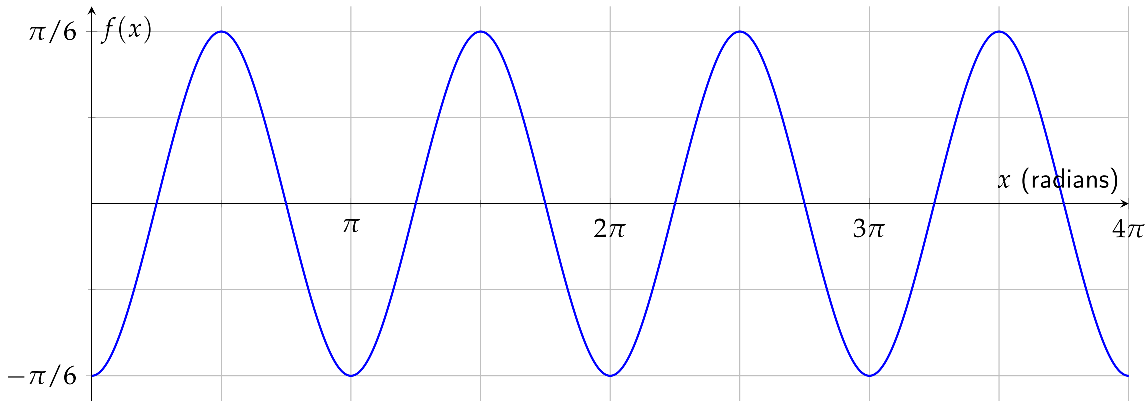

FIGURE 4 : Graphe de $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin^2(x) - \frac{1}{2})$

7. **Tracé du graphe**

   Le graphe de f est :

   - borné entre $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$,
   - pair donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
   - π-périodique.

8. **Réécriture à l'aide d'une identité trigonométrique**

   On rappelle l'identité trigonométrique fondamentale :

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Démonstration de l'identité

À partir de la formule de duplication du cosinus :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$$

et en utilisant l'identité $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, on obtient :

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x).$$

On isole alors $\sin^2(x)$:

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x),$$

d'où :

$$\boxed{\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}}.$$

Application à la fonction f

On remplace $\sin^2(x)$ par son expression dans la définition de f :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin^2(x) - \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi :

$$\sin^2(x) - \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos(2x)}{2} - \frac{1}{2}.$$

En mettant au même dénominateur :

$$\frac{1 - \cos(2x) - 1}{2} = -\frac{\cos(2x)}{2}.$$

On obtient alors :

$$\boxed{f(x) = \text{Arcsin}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)}.$$

Cette réécriture permet une lecture plus directe du comportement périodique et symétrique de la fonction f.

9. **(Bonus) Interprétation agronomique**
   J'ai besoin de votre aide pour cette question ! :) A vous de jouer futur-e ingenieur-e agronome !
