Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

# Examen de mathématiques

Mercredi 26 novembre 2025

*Promotion 116*

Antoine Géré

---

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non    Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

*Remarques :*

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

---

## Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition $D$ de $f$ ?
2. Calculer la dérivée $f'$ de la fonction $f$.
3. Déterminer le signe de $f'$ sur $D$, puis en déduire le sens des variations de $f$. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau de variation.
4. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D$.
5. Déterminer les éventuelles asymptotes (branches inifinies).
6. Déterminer l'équation de la tangente $T$ à $C$ en son point d'abscisse $x = 2$.
7. **(BONUS)** Étudier la position relative de $C$ et de $T$.
8. Construire, sur le même dessin, la courbe $C$, la tangente $T$ et les asymptotes éventuelles.
9. **(BONUS)** Pourrait-il y avoir un axe de symétrie ? Lequel ? Qu'en est-il vraiment ?

Correction ▼    [11.0106]

---

## Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

1. Quel est l'ensemble de définition $D$ de $f$ ?
2. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $x \in D$ on peut écrire

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \tag{1}$$

3. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$ à l'aide de l'expresion (1) . Que pouvons nous en déduire sur le comportement de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$ ?
4. Calculer la dérivée $f'$ de la fonction $f$ et étudier son signe.
5. En déduire les variations de $f$. On présentera les résultats sous forme d'un tableau de variation.
6. Déterminer les limites inconnues de $f$ aux bornes de $D$.
7. Déterminer l'équation de la tangente $T$ à $C$, la courbe de $f$, en son point d'abscisse $x = 2$.
8. Construire, sur le même dessin, la courbe $C$ et la tangente $T$.

Correction ▼ [11.0107]

## Exercice 3 BONUS

Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Calculer $f'(x)$ en tout point $x$ où $f$ est dérivable.
3. Étudier les variations de $f$. On pourra écrire la dérivée de $f$ sous la forme

$$f'(x) = \frac{u(x)f(x)}{x^2}$$

   et étudier la fonction $u$ pour trouver son signe.
4. Représenter graphiquement la fonction $f$.

Correction ▼ [11.0108]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. On considère la fonction
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}.$$
Le dénominateur $x^2 - x + 1$ ne s'annule jamais car
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0.$$
Ainsi, $x^2 - x + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc l'ensemble de définition est
$$\boxed{D = \mathbb{R}}.$$

2. On utilise la relation de dérivée d'un quotient :
$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1) - (x^2 - x - 2) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}.$$
On simplifie le numérateur :
$$(2x - 1)\big((x^2 - x + 1) - (x^2 - x - 2)\big) = (2x - 1)(3) = 6x - 3$$
Donc
$$\boxed{f'(x) = \frac{6x - 3}{(x^2 - x + 1)^2}}.$$

3. Le dénominateur $(x^2 - x + 1)^2 > 0$ pour tout $x$. Le signe de $f'$ dépend donc uniquement du numérateur $6x - 3$ :
$$f'(x) > 0 \iff 6x - 3 > 0 \iff x > \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \iff x < \frac{1}{2}.$$
Ainsi, on a le tableau de variation suivant

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-\frac{9}{4}$ | $\nearrow$ | $1$ |

4. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc les bornes de l'ensemble de définition sont $-\infty$ et $+\infty$.

**Limite en $+\infty$ :**
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}.$$
On divise numérateur et dénominateur par $x^2$ :
$$f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$
Lorsque $x \to +\infty$ :

$$\frac{1}{x} \to 0, \quad \frac{1}{x^2} \to 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1-0-0}{1-0+0} = 1.$$

**Limite en $-\infty$ :**

De même, lorsque $x \to -\infty$ :

$$f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{1-0-0}{1-0+0} = 1.$$

**Conclusion :**

La fonction admet une **asymptote horizontale** :

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1}.$$

5. Puisque le degré du numérateur et du dénominateur est le même, il y a une asymptote horizontale :

$$y = 1.$$

cf. question précedente pour le détail du calcul.

6. La fonction $f$ en $x = 2$ est ègale à :

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 - 2}{2^2 - 2 + 1} = \frac{4-4}{4-1} = 0.$$

La fonction $f'$ en $x = 2$ est ègale à :

$$f'(2) = \frac{3(4-1)}{(4-2+1)^2} = \frac{9}{9} = 1.$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \implies y = x - 2.$$

7. On considère $f(x) - (x-2)$ :

$$f(x) - (x-2) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1} - x + 2 = \frac{x^2 - x - 2 - (x-2)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1}.$$

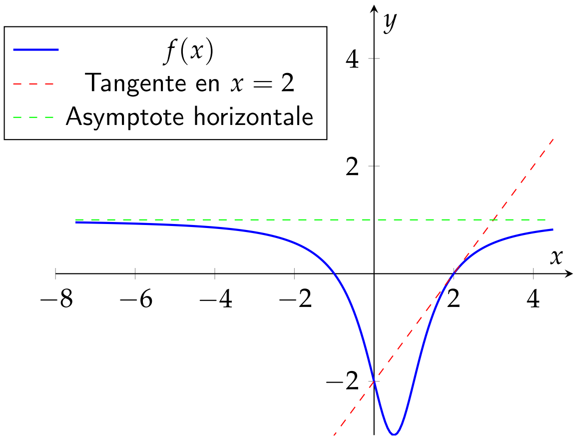
Simplification du numérateur :

$$(x^2 - x - 2) - (x^3 - x^2 + x - 2x^2 + 2x - x + 2) = -x^3 + 4x^2 - 4x,$$

$$f(x) - (x-2) = \frac{-x(x-2)^2}{x^2 - x + 1}.$$

Donc $C$ est au-dessus de $T$ pour $x < 0$, et en-dessous pour $x > 0$.

8. Représentation graphique




9. D'après le graphique s'il y avait un axe de symétrie, il serait en $x = 0{,}5$, emplacement du minimum.

   Or, pour tout $h$ réel, tel que $\dfrac{1}{2} + h \in D$, c'est à dire pour tout $h$ réel, puisque l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$, on a $\frac{1}{2} - h \in D$ et

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+h\right) - 2}{\left(\frac{1}{2}+h\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+h\right) + 1} = \frac{h^2 - \frac{9}{4}}{h^2 + \frac{3}{4}} = f\left(\frac{1}{2}-h\right)$$

   Les deux conditions sont vérifiées : la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est donc bien axe de symétrie de la courbe

---

## Correction de l'exercice 2 ▲

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}.$$

1. **Ensemble de définition $D$ :**

   La fonction $f$ est définie dès que le dénominateur $(x-1)^2 \neq 0$, c'est-à-dire

$$x \neq 1.$$

   Donc

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{1\}}.$$

2. **Écriture sous la forme $f(x) = x + a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$ :**

   On cherche $a$, $b$ et $c$ tels que

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

   Multiplions les deux côtés par $(x-1)^2$ :

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (x+a)(x-1)^2 + b(x-1) + c.$$

   Développons $(x+a)(x-1)^2$ :

$$(x+a)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x + ax^2 - 2ax + a = x^3 + (-2+a)x^2 + (1-2a)x + a.$$

   Ajoutons $b(x-1) + c = bx - b + c$ :

$$x^3 + (-2+a)x^2 + (1 - 2a + b)x + (a - b + c)$$

   On identifie les coefficients avec $x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ :


Tournez la page S.V.P.

- Coefficient de $x^3$ : $1 = 1$
- Coefficient de $x^2$ : $-2 + a = -4 \implies a = -2$
- Coefficient de $x$ : $1 - 2a + b = 8 \implies 1 - 2(-2) + b = 1 + 4 + b = 5 + b = 8 \implies b = 3$
- Coefficient constant : $a - b + c = -4 \implies -2 - 3 + c = -5 + c = -4 \implies c = 1$

Donc

$$\boxed{a = -2, \quad b = 3, \quad c = 1}.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}}.$$

3. **Limites en $+\infty$ et $-\infty$ :**

   Lorsque $x \to \pm\infty$, $\frac{3}{x-1} \to 0$ et $\frac{1}{(x-1)^2} \to 0$. Donc

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x - 2) = \pm\infty.$$

   **Conclusion :** la courbe admet une **asymptote oblique** $y = x - 2$.

4. **Dérivée de $f$ :**

   $$f(x) = x - 2 + 3(x-1)^{-1} + (x-1)^{-2}$$

   Dérivons terme par terme :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 3(x-1)^{-2} - 2(x-1)^{-3} \\ &= 1 - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)^3 - 3(x-1) - 2}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \\ f'(x) &= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

   Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $\dfrac{x-3}{x-1}$.

5. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $]-\infty; 1[$, strictement décroissante sur $]1; 3]$ et strictement croissante sur $[3; +\infty[$

6. On a

   $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

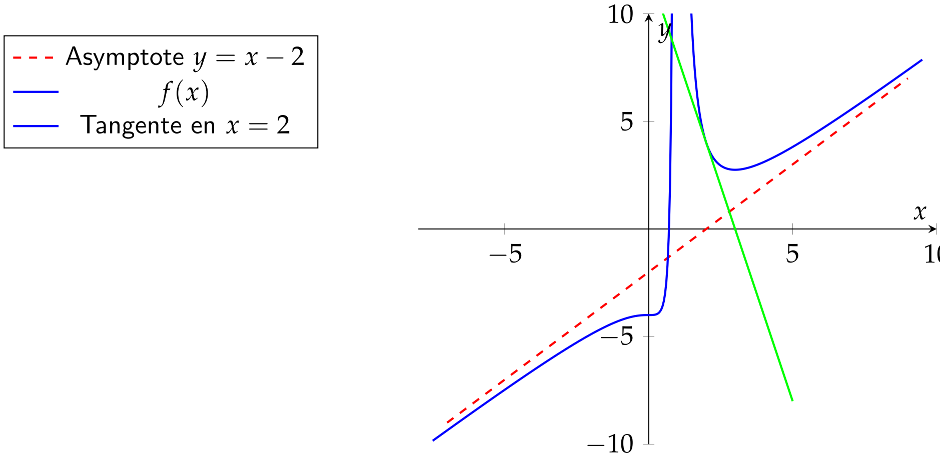
7. **Tangente en $x = 2$ :**

   $$f(2) = 2 - 2 + \frac{3}{1} + \frac{1}{1} = 0 + 3 + 1 = 4$$

   $$f'(2) = \frac{2^2(2-3)}{(2-1)^3} = \frac{4 \cdot (-1)}{1} = -4$$

   Équation de la tangente : $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \implies y - 4 = -4(x - 2) \implies y = -4x + 12$

8. **Représentation graphique :**
   La courbe $C$ admet une asymptote oblique $y = x - 2$, un point $A(2,4)$ avec tangente $y = -4x + 12$, et un comportement infini aux alentours de $x = 1$.




---

## Correction de l'exercice 3 ▲

Soit la fonction $f$ définie par

$$f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

1. **Ensemble de définition de $f$**
   Pour que $f(x)$ soit définie, il faut que $1 + 2x > 0$, car on $f$ peut s'écire comme

$$f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x}\right)$$

   Donc :

$$1 + 2x > 0 \implies x > -\frac{1}{2}.$$

   Ainsi, l'ensemble de définition de $f$ est :

$$\mathcal{D}_f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right].$$

2. **Calcul de la dérivée $f'(x)$**
   On écrit $f(x)$ sous forme exponentielle pour dériver plus facilement :

$$f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1 + 2x)\right).$$

   Posons

$$g(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{x}, \quad \text{alors } f(x) = e^{g(x)}.$$

   La dérivée est donnée par la règle de la chaîne :

$$f'(x) = g'(x)e^{g(x)} = g'(x)f(x).$$

   Calculons $g'(x)$ :

$$g(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{x} \implies g'(x) = \frac{x \cdot \frac{2}{1 + 2x} - \ln(1 + 2x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{2x}{1 + 2x} - \ln(1 + 2x)}{x^2}.$$

On peut mettre $f'(x)$ sous la forme suggérée dans l'énoncé :

$$f'(x) = \frac{u(x)f(x)}{x^2} \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x).$$

3. Étude des variations de $f$.

   On a trouvé la dérivée :

$$f'(x) = \frac{u(x)\,f(x)}{x^2}, \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x).$$

   On pose $t = 1+2x$

   - On a $t = 1+2x > 0$, alors $x = \dfrac{t-1}{2}$ et

$$u(x) = 1 - \frac{1}{t} - \ln t.$$

   - Étudions le signe de $v(t) = 1 - \frac{1}{t} - \ln t$ :

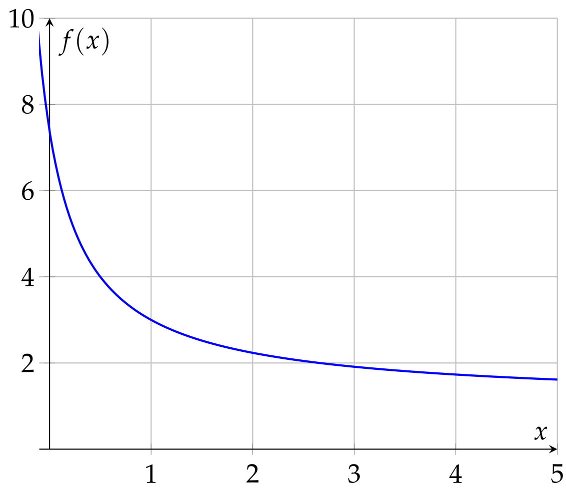
$$v'(t) = -\frac{t-1}{t^2}.$$

   - Conclusion sur le signe :
     - $0 < t < 1 \implies v'(t) > 0 \implies v(t)$ croissante,
     - $t > 1 \implies v'(t) < 0 \implies v(t)$ décroissante
     - $v(t)$ atteind son maximum en $t = 1$, or $v(1) = 0$, donc $v(t) < 0$
   - Ce qui donne $u(x) < 0$
   - de plus $x^2 > 0$
   - et

$$f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+2x)\right) > 0$$

   - donc la fonction $f$ est strictement décroissante

4. Représentation graphique :






Fin