Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Examen de mathématiques

Jeudi 12 décembre 2024

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
2. Calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.
4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure ?

Correction ▼ [21.0006]

Exercice 2

Partie A : Etude théorique.

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 5500$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,68u_n + 3560.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n). Si nécessaire vous pourrez représenter ces termes sur un graphique en vous aidant des droites d'équations $y = x$ et $y = 0,68x + 3560$. Conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 11125$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer alors v_n, en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 11125 - 5625 \times 0,68^n.$$

(c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Partie B : Mise en pratique.

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement. Une étude statistique a permis de constater que d'une année sur l'autre, 32% des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 3560 nouvelles personnes souscrivent un abonnement. En 2010, il y avait 5500 abonnés à cette revue.

3. Donner une estimation du nombre d'abonnés à cette revue en 2012.
4. Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à la revue l'année $2010 + n$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n, u_{n+1} = 0,68u_n + 3560$
   (b) Montrer qu'il n'est possible d'envisager au bout d'un nombre d'années suffisamment grand, une diffusion supérieure à 12000 abonnés.
   (c) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés à la revue sera supérieur à 11000 ?

Correction ▼ [21.0035]

Exercice 3

Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ de la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{x^5 + 3x - 1}{(x+3)(x-1)(x+2)}$$

Correction ▼ [15.0013]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On a $u_1 = \frac{1}{6}u_0^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ On va montrer que pour tout $n \geq 1$, alors $u_n > 0$ entraine que $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} > 0$$

   C'est bien le cas. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 = 0 < 3$, montrons que $u_n < 3$ entraine que $u_{n+1} < 3$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} < \frac{1}{6} \times 9 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.

3. Calculons $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} - u_n = \frac{1}{6}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = \frac{1}{6}(u_n - 3)^2 > 0$$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, comme elle est bornée par 3 , elle convergente

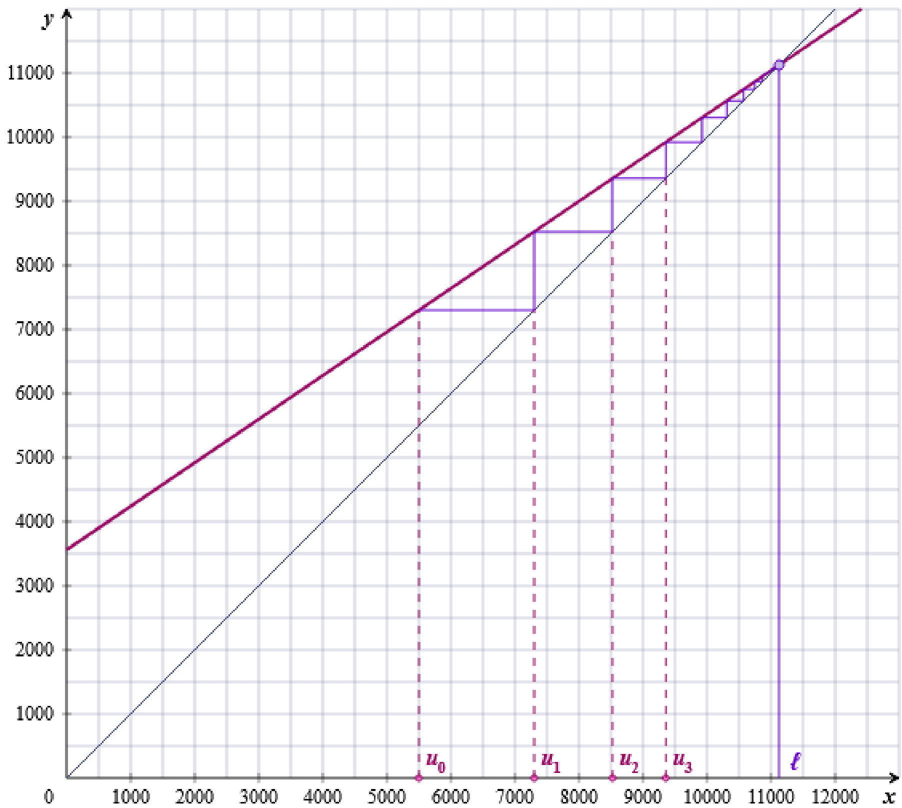
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l,

$$l = \frac{1}{6}l^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow l^2 - 6l + 9 = 0 \Leftrightarrow (l-3)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 3$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Partie A : Etude théorique.

1. On a $u_0 = 5500$, $u_1 = 7300$, $u_2 = 8524$ et $u_3 = 9356.32$.



Graphiquement, la suite (u_n) semble croissante et converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites :

$$\begin{aligned} 0,68x + 3650 = x &\Leftrightarrow 0,32x = 3650 \\ &\Leftrightarrow x = 11125 \end{aligned}$$

Si, la suite (u_n) admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$ alors cette limite est égale à 11125.

2.

(a) Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 11125 \\ &= 0,68u_n + 3560 - 11125 \\ &= 0,68u_n - 7565 \\ &= 0,68 \times (u_n - 11125) \\ v_{n+1} &= 0,68v_n \end{aligned}$$

Pour tout entier $n, v_{n+1} = 0,68v_n$ alors la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,68 . Calculons le premier terme de la suite (v_n) :

$$v_0 = u_0 - 11125 \text{ Soit } v_0 = 5500 - 11125 = -5625$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,68 et de premier terme $v_0 = -5625$.

(b) (v_n) est une suite géométrique de raison 0,68 et de premier terme $v_0 = -5625$ alors pour tout entier n,

$$v_n = -5625 \times 0,68^n$$

Comme pour tout entier n, $v_n = u_n - 11125$ alors $u_n = v_n + 11125$.
Donc pour tout entier n,

$$u_n = 11125 - 5625 \times 0,68^n.$$

(c) $0 < 0,68 < 1$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} 0,68^n = 0$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} 11125 - 5625 \times 0,68^n = 11125.$$

Soit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 11125.$$

La suite (u_n) converge vers 11125.

Partie B : Mise en pratique.

3. En 2011, 32% des 5500 abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 3560 nouvelles personnes souscrivent un abonnement. En 2011, le nombre d'abonnés est :

$$5500 \times 0,68 + 3560 = 7300$$

En 2012, 32% des 7300 abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 3560 nouvelles personnes souscrivent un abonnement. En 2012, le nombre d'abonnés est :

$$7300 \times 0,68 + 3560 = 8524$$

En 2012, il y a 8524 abonnés à cette revue.

4.

(a) D'une année sur l'autre, 32% des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 3560 nouvelles personnes souscrivent un abonnement donc d'une année sur l'autre, 68% des abonnés renouvellent leur abonnement et 3560 nouvelles personnes souscrivent un abonnement d'où :

Pour tout entier $n, u_{n+1} = 0,68u_n + 3560$

(b) D'après la partie A , pour tout entier $n, u_n = 11125 - 5625 \times 0,68^n$. D'où :

$$\begin{aligned} u_n > 12000 &\Leftrightarrow 11125 - 5625 \times 0,68^n > 12000 \\ &\Leftrightarrow -5625 \times 0,68^n > 12000 - 11125 \\ &\Leftrightarrow 0,68^n < -\frac{825}{5625} \end{aligned}$$

Or pour tout entier $n, 0,68^n > 0$.

Une diffusion supérieure à 12000 abonnés n'est pas envisageable.

(c) La calculatrice affiche 10. Donc à partir de 2020, le nombre d'abonnés à la revue sera supérieur à 11000 .

Correction de l'exercice 3 ▲

$$F(x) = \frac{x^5 + 3x - 1}{(x+3)(x-1)(x+2)} = x^2 - 4x + 15 + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{13}{x+2} - \frac{253}{4(x+3)}$$
