[21.0046]

On a : $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$

Donc l'équation caractéristique est $r^2 = r + 6 \iff r^2 - r - 6 = 0$

d'où $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (1) \times (-6) = 1 + 4 \times 6 = 25$

on a donc

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

et

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

donc $u_n = \alpha . 3^n + \beta . (-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

or $u_0 = 1$ et $u_1 = 8$, donc

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 8 = 3\alpha - 2\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 2\alpha + 2\beta \\ 8 = 3\alpha - 2\beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10 = 5\alpha \\ 1 = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 - \alpha = 1 - 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Conclusion :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = 2.(3)^n - (-2)^n$

$$= 2 \times 3^n + (-1)^{n+1} \times 2^n.$$