[21, 0044]

1a) $u_1 = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times u_0 + 12$

$= \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times 300 + 12$

$u_1 = 297$

1b) Soit (u_n) une estimation de la quantité (exprimée en milliers de tonnes) de déchets incinérées durant l'année $2019 + n$.
Une estimation de la quantité de déchets incinérés durant l'année suivante s'obtient à l'aide du montage suivant :

u_n

$\downarrow \times 0{,}95$ (diminution de 5 %)

$0{,}95 u_n$

$\downarrow + 12$ (12 000 tonnes de déchets supplémentaires)

$0{,}95 u_n + 12 = u_{n+1}$

Ainsi pour $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = 0{,}95 u_n + 12$.

2a) On impose que (V_n) soit une suite géométrique.
Donc $V_{n+1} = q \times V_n$, avec q la raison de la suite (V_n).

$V_{n+1} = u_{n+1} + X$

$= 0{,}95 u_n + 12 + X$

$= 0{,}95 (V_n - X) + 12 + X$

$= 0{,}95 V_n - 0{,}95 X + 12 + X$

$\underline{V_{n+1} = 0{,}95 V_n} + \underbrace{12 + 0{,}05 . X}_{= 0}$ donc $X = \frac{-12}{0{,}05} = -240$.

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,95$, et de premier terme $v_0 = u_0 + X = 300 - 240 = 60$.

2b) On a donc $v_n = q^n v_0$

$= (0,95)^n \times 60$

2c) On peut alors écrire $u_n = v_n - X$

$= (0,95)^n \times 60 + 240$

3) On sait que $0 < 0,95 < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,95)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 240$

Ce qui signifie, qu'à partir d'un certain nombre d'années, la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer sera proche de 240 000 tonnes par an.

4) Une diminution de 15 % par rapport à 2019 nous donne comme quantité :

$$300 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 255.$$

donc on cherche n tel que

$$u_n \leq 255 \iff (0,95)^n \times 60 + 240 \leq 255$$

$$\iff (0,95)^n \times 60 \leq 15$$

$$\iff (0,95)^n \leq 0,25$$

$$\iff n \ln(0,95) \leq \ln(0,25)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,95)} \simeq 27,03$$

donc pour $n = 28$, $u_n \leq 255$.