[14.0122]

1) $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}-i}\right)^2 + \frac{7-9i}{1+2i}$

- $\frac{7-9i}{1+2i} = \frac{(7-9i)(1-2i)}{1+4} = \frac{1}{5}\left(7-14i-9i-18\right) = -\frac{1}{5}(11+23i)$

- $\frac{1+i}{\sqrt{2}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{2}+i)}{2+1} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}-1\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1+i(1+\sqrt{2})\right)$

Donc,

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}-i}\right)^2 = \frac{1}{9}\left(\sqrt{2}-1+i(\sqrt{2}+1)\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}\left((\sqrt{2}-1)^2 + 2i(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}+1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left((\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1) + 2i(2-1)\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(2\sqrt{2}\cdot(-2) + 2i\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(-4\sqrt{2}+2i\right)$$

D'où

$$z = \frac{1}{9}\left(-4\sqrt{2}+2i\right) - \frac{1}{5}(11+23i)$$

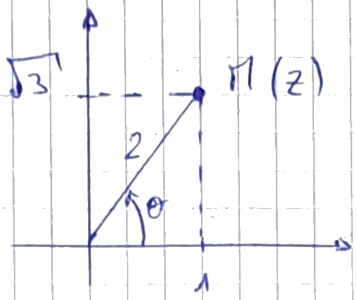
$$= \frac{1}{45}\left(-20\sqrt{2}+10i-99-207i\right)$$

$$\boxed{z = \frac{-1}{45}\left(99+20\sqrt{2}+i\,197\right)}$$

2) $z = 1 + i\sqrt{3}$

<u>Calcul du module</u> $|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

<u>Argument</u>



$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

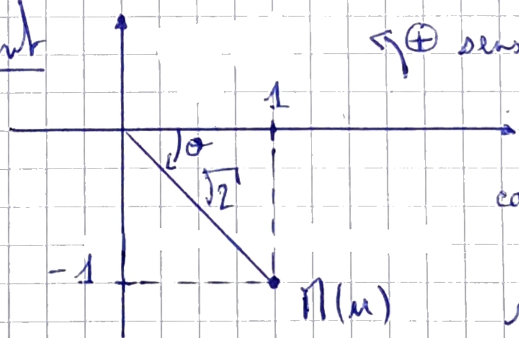
Donc $\boxed{z = 2\, e^{i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $u = 1 - i$

<u>Calcul du module</u> $|u| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

<u>Calcul de l'argument</u>

↺⊕ sens trigonométrique



$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

En tenant compte du sens trigonométrique un argument de u est $\arg(u) = -\dfrac{\pi}{4}$.

4) Déterminons les racines cubiques de $u = 1 - i$.
D'après la question précédente on peut écrire u sous forme exponentielle,

$$u = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi}$$

On cherche z tel que : $z^3 = u$

donc $z = u^{1/3} = 2^{1/6} \cdot e^{-i\pi/12 + \frac{2}{3}ik\pi}$ avec $k = \{0, 1, 2\}$

donc les solutions sont :

$$z_1 = 2^{1/6} e^{-i\pi/12}$$

$$z_2 = 2^{1/6} e^{+7i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_3 = 2^{1/6} e^{+\frac{5i\pi}{4}}$$

5) Soit l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$

Le discriminant : $\Delta = 16 - 4 \times 5 = -4$

Les solutions sont : $z_1 = \frac{4 + \delta_1}{2}$ et $z_2 = \frac{4 - \delta_2}{2}$

avec δ définit comme : $\delta^2 = \Delta$

Donc $\delta_1 = -2i$ et $\delta_2 = +2i$

D'où

$$z_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

$$z_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

6) Bonus :) $27 \times 134 = 3618$.