$u = 1 + i$

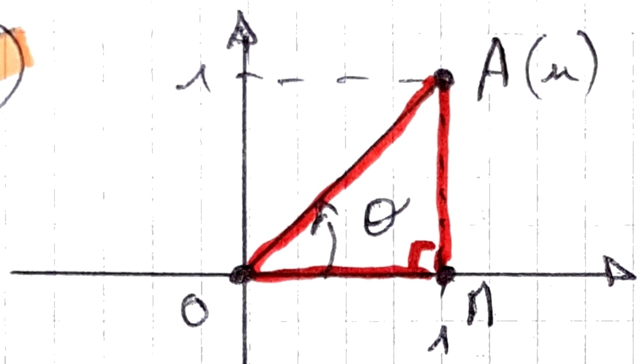
$v = -1 + i\sqrt{3}$

$|u| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|v| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

---

u



$OA = |u| = \sqrt{2}$

$\arg(u) = \theta + 2k\pi$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{MA}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

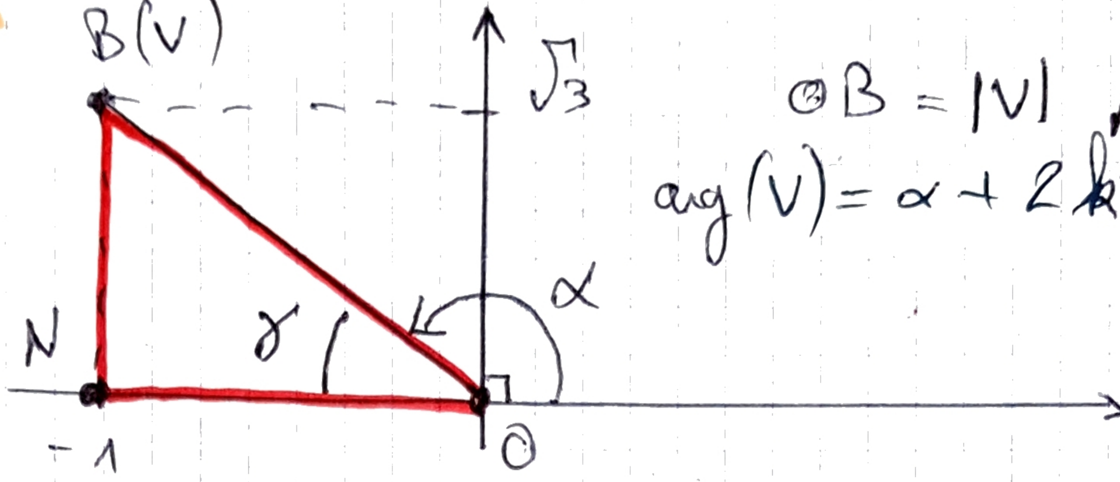
↳ Donc (cf cercle trigo du cours) $\theta = \frac{\pi}{4}$

donc $\arg(u) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

D'où $\boxed{u = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi}}$

avec k un entier relatif.

V



$OB = |V|$

$\arg(V) = \alpha + 2k'\pi$

$$\sin(\gamma) = \frac{NB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{ON}{OB} = \frac{1}{2}$$

donc (d'après le cercle trigo du cours) on a

$$\gamma = \frac{\pi}{3}$$

or ce n'est pas γ que l'on souhaite connaître mais α !!

On peut écrire $\alpha + \gamma = \pi$ $(= 180°)$

donc
$$\begin{aligned} \alpha &= \pi - \gamma \\ &= \pi - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Donc $\arg(v) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

D'où $\boxed{v = 2 \cdot e^{\frac{2i\pi}{3} + 2ik'\pi}}$

Racine cubique de u

On cherche les nombres complexes tq :

$$\boxed{z^3 = u} \quad \text{ici } n = 3.$$

or $u = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi}$

donc $z^3 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi}$

donc $z_k = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi}\right)^{1/3}$

or $n = 3$ donc on a $\boxed{k = 0\ ,\ k = 1\ ,\ k = 2}$

Les trois solutions sont donc,

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/6} \cdot e^{i\pi/12} \\ z_1 &= 2^{1/6}\ e^{i\,9\pi/12} \\ z_2 &= 2^{1/6}\ e^{i\,17\pi/12} \end{aligned}}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}$$

Méthode 1

$$= \frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-1-i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{1+3}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} - i\,\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Méthode 2

On sait que

$$u = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4 + 2ik\pi}$$

$$v = 2\, e^{2i\frac{\pi}{3} + 2ik'\pi}$$

Donc

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi}}{2\; e^{i\frac{2\pi}{3} + 2ik'\pi}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{2ik\pi} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{-2ik'\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, \underbrace{e^{-\frac{5i}{12}\pi}} \cdot \underbrace{\underbrace{e^{2ik\pi}}_{=+1} \cdot \underbrace{e^{-2ik'\pi}}_{=+1}}_{*}$$

car

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-5}{12}\pi$$

$*$ car : k et k' sont des entiers relatifs

et :

$$e^{2ik\pi} = \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + i\,\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}$$

$$e^{2ik'\pi} = \underbrace{\cos(2k'\pi)}_{=1} + i\,\underbrace{\sin(2k'\pi)}_{=0}$$

On a obtenu deux expressions pour $\frac{u}{v}$. Or les deux expressions désignent le même nombre complexe donc

$$\left(\frac{u}{v}\right)_{\text{Méthode 1}} = \left(\frac{u}{v}\right)_{\text{Méthode 2}}$$

Or si 2 nombres complexes sont égaux cela signifie que leurs parties réelles sont égales et la même chose pour leur partie imaginaire.

$$\left(\frac{u}{v}\right)_{\text{Méthode 1}} = \underbrace{\frac{-1+\sqrt{3}}{4}}_{\text{Partie Réelle}} - i\,\underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}_{\text{Partie imaginaire}}$$

⚠ avec le $-$

$$\left(\frac{u}{v}\right)_{\text{Méthode 2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5i\pi}{12}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}}_{\text{Partie réelle}} + i\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}}_{\text{Partie imaginaire}}$$

Donc

$$\begin{cases} -\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \\ -\frac{(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$$

Donc,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}}$$