[13.0000]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, donc $M^T = -M$.

1) On souhaite montrer que $(I+M)$ est inversible.

Deux remarques avant de commencer :

- Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $X^T = (x_1 \cdots x_n)$

  donc $X^T . X = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$

  $X^T . X$ correspond à la norme / longueur au carré du vecteur X.

- De plus on s'appuiera sur le résult suivant :

  si $AX = 0 \iff X = 0$, alors A est inversible.

On suppose $(I+M)X = 0 \iff IX = -MX$

$\iff X = -MX$

donc,
$$\begin{aligned}(MX)^T (MX) &= (MX)^T (-X) \\ &= (MX)^T(-X) \\ &= -X^T M^T X \\ &= -X^T(-M)X \\ &= +X^T MX \\ &= -X^T X \leq 0\end{aligned}$$

or $(MX)^T (MX) \geq 0$ d'après la première remarque.

donc $(MX)^T(MX) = 0$

donc $X^T X = 0$

donc $X = 0$

De plus si $X = 0$, alors $(I + M)X = 0$

Donc $(I + M)$ est inversible d'après la $2^{ème}$ remarque.

2) On a $A = (I - M)(I + M)^{-1}$

On souhaite montrer que $A^{-1} = A^T$.

Or,

$$A^T = \left((I - M)(I + M)^{-1}\right)^T$$
$$= \left((I + M)^{-1}\right)^T (I - M)^T$$
$$= \left((I + M)^T\right)^{-1} (I - M^T)$$
$$= (I + M^T)^{-1} (I - M^T)$$
$$= (I - M)^{-1} (I + M)$$

donc

$$A^T . A = (I - M)^{-1}(I + M)(I - M)(I + M)^{-1}$$
$$= \left[(I - M)^{-1}(I + M)\right].\left[(I + M) . (I - M)^{-1}\right]^{-1}$$

Montrons que $(I + M)$ et $(I - M)^{-1}$ commutent.

$$(I + M)(I - M) = I - M + M - M^2 = I - M^2$$
$$(I - M)(I + M) = I + M - M - M^2 = I - M^2$$

de plus,

$$(I + M)(I - M) = (I - M)(I + M)$$
$$\Leftrightarrow (I - M)^{-1}(I + M)(I - M)(I - M)^{-1} = (I - M)^{-1}(I - M).$$
$$(I + M) . (I - M)^{-1}$$

$\Longleftrightarrow (I-M)^{-1}(I+M) = (I+M)(I-M)^{-1}$

donc $(I+M)$ et $(I-M)^{-1}$ commutent bien.

donc $A^T . A = [(I+M).(I-M)^{-1}].[(I+M)(I-M)^{-1}]^{-1}$

$A^T . A = I$

On a donc bien $A^T = A^{-1}$.