[11.0081]

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$$

1a) ln est définie pour $x > 0$, or $x - 1 > 0$ pour $x > 1$

Donc $D_g =]1;+\infty[$.

1b) on pose $u = x - 1$

on a $\lim\limits_{x \to 1} u = 0$

de plus $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1) = 2(u+1) - u.\ln(u)$

or $\lim\limits_{u \to 0} u\ln(u) = 0$

donc $\lim\limits_{u \to 0} 2(u+1) - u.\ln(u) = 2$

donc $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$

1c) $g'(x) = 2 - \left(1.\ln(x-1) + (x-1).\dfrac{1}{x-1}\right)$

$= 2 - \ln(x-1) - 1$

$g'(x) = 1 - \ln(x-1)$

1d) $g'(x) > 0 \iff 1 - \ln(x-1) > 0$

$\iff \ln(x-1) < 1$

$\iff x - 1 < e^1$ car la fonction exp. est strict. croissante.

$\iff x < e+1$

x	1		$e+1$		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$			
$g(x)$	‖ 2	$+$ ↗	$e+2$	$+$	0	$-$ ↘	$-\infty$

$g(e+1) = 2(e+1) - (e+1-1).\ln(e+1-1)$

$= 2(e+1) - e\ln(e)$

$= e+2$

1 e) $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

$$= x\left(2 - \frac{x-1}{x} \cdot \ln(x-1)\right)$$

$$= x\left(2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(x-1)\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\ln(x-1) = 0$$

donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(x-1)\right) = -\infty$

donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

1 f) On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

donc on étudie $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$

> ⚠ De plus la courbe de g admet une asymptote verticale en $x = 1$ et une asymptote horizontale en $x = e+1$.

or d'apres la question précédente on a directement

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$$

la courbe de g admet donc une branche parabolique d'axe (Oy).

1 g) • Sur $]1; e+1[$ l'equation $g(x) = 0$ n'a pas de solution (cf tableau de variation)

• La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[e+1; +\infty[$ de plus l'intervalle image dans ce cas $\left(g([e+1; +\infty[)\right)$ est

$$\left[g(e+1); \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[= [e+2; -\infty[.$$

or $e+2 > 0$

Conclusion : $g(x)$ admet une unique solution sur $]1;+\infty[$, notée α, avec $\alpha \in [e+1;+\infty[$.

$\boxed{\text{Bonus :}}$ Mq $\alpha \in [e+1, e^3+1]$.

- $g(e+1) = e+2 > 0$
- $g(\alpha) = 0$
- $g(e^3+1) = 2(e^3+1) - (e^3+1-1)\ln(e^3+1-1)$

$$= 2(e^3+1) - 3e^3$$
$$= 2 - e^3 < 0$$

donc

$$g(e+1) < g(\alpha) < g(e^3+1)$$

or g est continue et strictement décroissante sur $[e+1, e^3+1]$
on en déduit donc :

$$e^3+1 < \alpha < e+1$$

D'où $\alpha \in [e+1; e^3+1]$.

1 h) cf tableau de variation

2 a) $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

2 b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

2 c) La courbe de f admet :

→ une asymptote horizontale d'éq $y = 0$ en $-\infty$,
→ " " verticale " $x = -1$ en -1,
→ " " " " $x = 1$ " 1,
→ " " horizontale " $y = 0$ en $+\infty$.

2 d) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} \quad \left(= \dfrac{u}{v}\right)$ N.B $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{u^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1} \cdot x - \ln(x^2-1)}{x^2}$$

$$= \frac{2}{x^2-1} - \frac{\ln(x^2-1)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{(x^2-1)\,x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x^2)}{(x^2-1)\,x^2}$$

2 e) • pour $x > 1$, $f'(x) > 0 \iff g(x^2) > 0$
↳ donc cf question 1.

• pour $x < -1$, $f'(x) > 0 \iff g(x^2) > 0$
↳ donc encore une fois cf question 1.

3) Bonus : cf calculatrice.