[04.0038]

1) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 22\lambda - 24$

$P(1) = -1 + 3 + 22 - 24 = 0$

2) comme $P(1) = 0$ on peut écrire :

$P(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (a\lambda^2 + b\lambda + c)$

on cherche a, b et c

on trouve facilement : $a = -1$

$b = 2$

$c = 24$

donc

$P(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 24)$

donc les valeurs propres sont : $\{-4 ; 1 ; 6\}$.

3) $\lambda_1 = 6 \rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -4 \rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) $P = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5) $X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X$

$\iff P^{-1}X' = D P^{-1} X$

on pose $Y = P^{-1}X$ donc $Y' = P^{-1}X'$

d'où $X' = AX \iff Y' = DY$

donc $y_1' = \lambda_1 y_1 \implies y_1 = k_1 e^{\lambda_1 t}$, $k_1 \in \mathbb{R}$

$y_2' = \lambda_2 y_2 \implies y_2 = k_2 e^{\lambda_2 t}$, $k_2 \in \mathbb{R}$

$y_3' = \lambda_3 y_3 \implies y_3 = k_3 e^{\lambda_3 t}$, $k_3 \in \mathbb{R}$

or $X = PY$

donc $X(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ k_2 e^{\lambda_2 t} \\ k_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$

6) ...