[04.0036]

On peut écrire le système sous forme matriciel :

$$X_{n+1} = A X_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

On conjecture que $X_n = A^n X_0$ pour $n \geq 1$.

avec $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On le montre par récurrence.

Initialisation : pour $n = 1$ on a $X_1 = A X_0$
en effet c'est ce que donne le système de suite
de l'exercice : $u_1 = 4u_0 + 2v_0$
$v_1 = -6u_0 - 4v_0$

Hérédité : On suppose pour un n fixé que $X_n = A^n X_0$
On veut montrer que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$

On a $X_n = A^n X_0$

or $X_{n+1} = A X_n$

donc $A X_n = A . A^n X_0$

donc $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$

Conclusion : On a pour $n \geq 1$ $X_n = A^n X_0$.

Nous avons besoin à présent de calculer A^n.

On a $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(-4-\lambda) + 12$$

$$= -(4-\lambda)(4+\lambda) + 12$$

$$= -(4^2 - \lambda^2) + 12$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

Donc $Sp(A) = \{2 ; -2\}$

A est donc diagonalisable.

Recherche des vecteurs propres.

- $AX = 2X \iff \begin{cases} 4a + 2b = 2a \\ -6a - 4a = 2b \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 2a + b = a \\ -3a - 2a = b \end{cases}$$

$$\iff \boxed{a + b = 0}$$

Donc $X = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $AX = -2X \iff \begin{cases} 4a + 2b = -2a \\ -6a - 4a = -2b \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2a + b = -a \\ -3a - 2a = -b \end{cases}$

$\iff \boxed{3a + b = 0}$

Donc $X = \begin{pmatrix} a \\ -3a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = -2$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Son inverse est $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Et la matrice diagonale est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On a donc

$A^n = P D^n P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

$= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 3 & (-1)^{n+1} + 1 \\ (-1)^n . 3 - 3 & (-1)^n . 3 - 1 \end{pmatrix}$