[04.0035]

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -9 & 10 & 9 \\ 6 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

1) Le polynôme caractéristique de la matrice A peut s'écrire comme :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2)
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 & 6 \\ -9 & 10-\lambda & 9 \\ 6 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 - C_3$$

$$= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 6 \\ -9 & 1-\lambda & 9 \\ 6 & -1+\lambda & -5-\lambda \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 4-\lambda \\ 6 & \lambda-1 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+2} \times (\lambda - 1) \times \begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-1) \times \left((-5-\lambda)(4-\lambda) + 18 \right)$$

$$= -(\lambda-1) \times \left(-20 + 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 18 \right)$$

$$= -(\lambda-1) \times \underbrace{\left(\lambda^2 + \lambda - 2 \right)}_{\text{Racines : } 1 \text{ et } -2}$$

On peut donc écrire :

$$P(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)$$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

3) Les valeurs propres de A sont 1 et -2.
La matrice A est une matrice 3×3, elle a cependant que deux valeurs propres différentes. On ne peut donc encore conclure si A est diagonalisable ou non.

4) Recherche des vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et -2.

■ $\boxed{\lambda = 1}$

On écrit $AX = 1X$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} -5a + 6b + 6c = a \\ -9a + 10b + 9c = b \\ 6a - 6b - 5c = c \end{cases} \iff \begin{cases} -6a + 6b + 6c = 0 \\ -9a + 9b + 9c = 0 \\ 6a - 6b - 5c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{a = b + c}$$

On peut donc écrire :

$$X = \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc les vecteurs X_2 et X_3 sont bien les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$.

■ $\boxed{\lambda = -2}$

De la même façon on peut écrire :

$$\begin{cases} -5a + 6b + 6c = -2a \\ -9a + 10b + 9c = -2b \\ 6a - 6b - 5c = -2c \end{cases} \iff \begin{cases} 3a = 6b + 6c \\ 9a = 12b + 9c \\ 6a = 6b + 3c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2b + 2c \\ 3a = 4b + 3c \\ 2a = 2b + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2b + 3c = 0 \\ a = -c \end{cases}$$

Donc
$$X = \begin{pmatrix} -c \\ -\frac{3}{2}c \\ c \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}c\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur X_1 est donc bien le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

5) On peut donc écrire la matrice de passage P,
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Avec ce choix la matrice diagonale D s'écrit :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6) Inverse de P.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

On a donc
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

7) Calcul de A^6.

$$A^6 = PDP^{-1} . PDP^{-1} . PD.P^{-1} . PDP^{-1} . PDP^{-1} . PDP^{-1}$$
$$= P D^6 P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 128 \\ 1 & 0 & 192 \\ 0 & 1 & -128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 127 & -126 & -126 \\ 189 & -188 & -189 \\ -126 & 126 & 127 \end{pmatrix}$$