1) Soit $A = B^2$

Si B est diagonalisable, alors $B = PDP^{-1}$

donc $B^2 = PDP^{-1}PDP^{-1}$

$= PD^2P^{-1}$

or $A = B^2$

donc $A = PD^2P^{-1}$

or D^2 est une matrice diagonale

donc A est diagonalisable.

Au contraire la reciproque est fausse En effet :

soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B n'est pas diagonalisable car elle a une seule valeur propre 0 mais uniquement 2 vecteurs propres.

A est diagonalisable, car elle a une valeur propre triple 0 avec 3 vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La reciproque est donc bien fausse.

2 109. 200

2) a) $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & -5 \\ -5 & 3-\lambda & 3 \\ -5 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$$= \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & -5 \\ -5 & -\lambda & 3 \\ -5 & \lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \times (11-\lambda) \times \left(-\lambda(3-\lambda) - 3\lambda\right)$$
$$+ (-1)^{1+3} \times (-5) \times \left(-5 \times \lambda - 5\lambda\right)$$

$$= -\lambda \left((11-\lambda)(3-\lambda) + (11-\lambda)3 - 50\right)$$
$$= -\lambda \left(\lambda^2 - 11\lambda - 3\lambda + 33 + 33 - 3\lambda - 50\right)$$
$$= -\lambda \left(\lambda^2 - 17\lambda + 16\right)$$
$$= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 16)$$

$Spec(A) = \{0, 1, 16\}$

donc A est diagonalisable.

21 09. 200

$$AX = 0 \iff \begin{cases} 11x - 5y - 5z = 0 \\ -5x + 3y + 3z = 0 \\ -5x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -5x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y - z \\ -5y - 5z + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = X \iff \begin{cases} 11x - 5y - 5z = x \\ -5x + 3y + 3z = y \\ -5x + 3y + 3z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x - 5y - 5z = 0 \\ -5x + 2y + 3z = 0 \\ -5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2109.2 00

$$AX = 16X \iff \begin{cases} 11x - 5y - 5z = 16x \\ -5x + 3y + 3z = 16y \\ -5x + 3y + 3z = 16z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5x + 13y - 3z = 0 \\ 5x - 3y - 13z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x = -5y - 5z \\ 5x + 13y - 3z = 0 \\ 5x - 3y - 13z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x = -5y - 5z \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 16 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2109-200

2)b) si $C = P^{-1} B P$

alors $C^2 = P^{-1} B P P^{-1} B P$

$= P^{-1} B^2 P$

$= P^{-1} A P$

donc d'apres la definition :

$C^2 = D$

on a $CD = P^{-1} B P P^{-1} A P$

$= P^{-1} B A P$

et $DC = P^{-1} A B P$

or $A = B^2$ donc $BA = B^3$ et $AB = B^3$

donc A et B commutent

et donc C et D commutent

2)c) On a $B^2 = A \Leftrightarrow (P C P^{-1})(P C P^{-1}) = A$

on a $C^2 = D$ et $B = P C P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 16 \end{pmatrix}$ donc $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

et $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -4 \end{pmatrix}$

$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 4 \end{pmatrix}$ $C_4 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -4 \end{pmatrix}$

2109.200

de plus on a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

donc $B_1 = P C_1 P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = P C_2 P^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = P C_3 P^{-1}$$

$$B_4 = P C_4 P^{-1}$$