04.0025

$u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

pour $n \geq 1$ on a $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} u_{n-1}$.

1) on a donc $u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_0$

on peut écrire ceci sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_0 \\ 1 u_1 + 0 . u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

avec la notation de l'exercice on a :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prouvons par récurrence que l'on peut écrire pour $\forall n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \qquad (I)$$

on vient de le vérifier pour $n = 1$. vérifions que si on suppose la relation (I) vrai pour un n fixe alors on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \qquad (II)$$

or $u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n$ d'après la définition.

donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n \\ 1 u_{n+1} + 0 u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$= A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

2109.0196

donc d'après (I) on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

on vient donc de prouver (II).

On peut donc conclure que pour $\forall n \geq 1$ on peut écrire

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(-\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$= \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\lambda^2 - \lambda - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda - 1)(2\lambda + 1)$$

Donc $\quad \mathrm{Spec}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$

2109.0196

3) On peut donc écrire :

$$X^n = Q_n(X)\, P_A(X) + R_n(X)$$

or $P_A(\lambda_1) = P_A(\lambda_2) = 0$ avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

donc
$$\begin{cases} 1 = R_n(1) = a_n + b_n \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n = R_n\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} a_n + b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{2} a_n \\ b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2}{3} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-1)^n 2^{1-n} \\ b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-1)^n 2^{1-n} \end{cases}$$

4) On a $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

On obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} \overset{= \frac{a_n}{2} + b_n}{\boxed{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-1)^n \cdot 2^{-n}}} & \overset{= \frac{a_n}{2}}{\boxed{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-1)^n\, 2^{-n}}} \\ \underset{= a_n}{\boxed{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-1)^n\, 2^{1-n}}} & \underset{= b_n}{\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-1)^n\, 2^{1-n}}} \end{pmatrix}$$

$A^n = a_n A + b_n I_2$ $\quad$ On a alors $A_\infty = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3} u_1 + \frac{1}{3} u_0 = \frac{2}{3}$.