$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \times (2-\lambda) \times \left(-\lambda(1-\lambda) - 1\right)$$
$$+ (-1)^{1+2} \times (2-\lambda) \times \left(-(1-\lambda) - 1\right)$$

$$= (2-\lambda) \times \left(-\lambda(1-\lambda) - 1 + (1-\lambda) + 1\right)$$

$$\cancel{= (2-\lambda) \times \left(\lambda^2 - \lambda + 1 + 1 - \lambda + 1\right)}$$

$$\cancel{= (2-\lambda) \times \left(\lambda^2 - 2\lambda + 3\right)}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$$\mathrm{Spec}(A) = \{2, 1\}$$

2109-014 6

$$AX = X \iff \begin{cases} 3x + 2y + z = x \\ -x - z = y \\ -x - 2y + z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = 2X \iff \begin{cases} 3x + 2y + z = 2x \\ -x - z = 2y \\ -x - y + z = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

21090146

Pour la valeur propre $\lambda = 1$ nous avons un vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour la valeur propre $\lambda = 2$ nous avons un vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nous pouvons donc affirmer que A n'est pas diagonalisable.