$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+2} \cdot (4-\lambda) \times \left((3-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (4-\lambda) \cdot (3-\lambda-1) \times (3-\lambda+1)$$

$$= (4-\lambda)^2 \times (2-\lambda)$$

2) Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{4, 2\}$.

4 est valeur propre double donc nous devons trouver 2 vecteurs propres associés.

2 est valeur propre simple donc nous devons trouver 1 vecteur propre associé.

$\Rightarrow$ Si ce n'est pas le cas A ne sera pas diagonalisable.

$$AX = 4X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -z$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2109-0143

On a donc bien deux vecteurs propres $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ associé à $\lambda = 6$.

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 6y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ 6z + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a bien 1 vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ associé à $\lambda = 2$.

Nous avons alors

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tel que $A = PDP^{-1}$.

3) Nous obtenons :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2109.0163

4) d'où,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{-1+n} + 2^{-1+2n} & 0 & 2^{-1+n} - 2^{-1+2n} \\ -2^n + 4^n & 4^n & -2^n + 4^n \\ 2^{-1+n} - 2^{-1+2n} & 0 & 2^{-1+n} + 2^{-1+2n} \end{pmatrix}$$