04.0014.C

$m \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1) $$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \lambda-2 & 0 \\ +1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ \cancel{2-m}\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} \times (\lambda-2) \times (1-\lambda)(m-\lambda)$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(m-\lambda)$$

$\mathrm{Spec}(A) = \{2, 1, m\}$

2) • si $m \neq 1 ; 2$, alors A est diagonalisable.

• si $m = 1$, alors $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2\}$

On cherche alors le(s) vecteur(s) propre(s) associés à 1.
1 est valeur propre double, donc afin que A soit diagonalisable
il est nécessaire d'avoir deux vecteurs propres associé à $\lambda = 1$.

2109.0142

$$AX = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = x \\ -x + 2y + z = y \\ x - y + z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y + z \\ x = y \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vient de trouver qu'il n'existe qu'un seul vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1.

<u>Donc</u> dans le cas $m = 1$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

- <u>si $m = 2$</u>, alors $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2\}$.

  de m̂ que dans la situation précédente, comme la valeur propre 2 est vp double on doit chercher les vecteurs propres de 2 et en trouver deux afin que A soit diagonalisable.

$$\cancel{AX = 2X \iff} \cancel{\begin{cases} x + z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ x - y + z = 2z \end{cases}}$$

2109.0142

$$AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ 2z = z \end{cases}$$

$$\iff \boxed{z = x}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vient de trouver qu'il existe deux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 2.

Donc dans le cas $m = 2$ la matrice A est diagonalisable.

3) $m = 3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Spec}(A) = \{1, 2, 3\}$$

Nous avons besoin des vecteurs propres associés à 1, 2 et 3. Et ce afin de pouvoir construire la matrice P.

2109.0142

$$AX = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = x \\ -x + 2y + z = y \\ -x + \cancel{}y + 3z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ y + z = x \\ y + 2z = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↳ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$$AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ -x + y + 3z = 2z \end{cases}$$

2109.0142

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↳ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

$$AX = 3X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 3x \\ -x + 2y + z = 3y \\ -x + y + 3z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 2x \\ x = y \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

↳ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

On a donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2109-0142

L'inverse P^{-1} de la matrice P est donné par la relation :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} C^T$$

Je vous laisse faire ce calcul. Nous obtenons :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et comme $A^k = P D^k P^{-1}$ avec $k \in \mathbb{N}$

on a :

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2^k - \frac{3^k}{2} & \frac{1}{2} - 2^k + \frac{3^k}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3^k}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3^k}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3^k}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3^k}{2} \\ 2^k - 3^k & -2^k + 3^k & 3^k \end{pmatrix}$$