04.0011.C

1. $\omega''' + \omega'' + \omega' + \omega = 0 \iff \omega''' = -\omega'' - \omega' - \omega$

On pose $X = \begin{pmatrix} \omega'' \\ \omega' \\ \omega \end{pmatrix}$ donc $X' = \begin{pmatrix} \omega''' \\ \omega'' \\ \omega' \end{pmatrix}$

de plus $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

tel que $X' = AX$

<u>Valeurs propres et vecteurs propres de A</u>

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$$

$\mathrm{Spec}(A) = \{-1, i, i\}$. On pose $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$AY = -Y \rightsquigarrow E_{-1} = \mathrm{Vect}((1, -1, 1))$

$AY = iY \rightsquigarrow E_i = \mathrm{Vect}((-1, i, 1))$

$AY = -iY \rightsquigarrow E_{-i} = \mathrm{Vect}((-1, -i, 1))$

Solutions générales

On a $X_1 = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_2 = e^{it} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_3 = e^{-it} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Les solution générales $X' = AX$ sont donc de la forme :

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Conditions initiales

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha X_1(0) + \beta X_2(0) + \gamma X_3(0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha - \beta - \gamma \\ 0 = -\alpha + i\beta - i\gamma \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{ \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = -\gamma$$

On a donc

$$X(t) = \beta X_2(t) - \beta X_3(t)$$

$$= \beta \begin{pmatrix} -e^{it} + e^{-it} \\ i\, e^{it} + i\, e^{-it} \\ e^{it} - e^{-it} \end{pmatrix}$$

(2) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

et $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ tel que $\dot{X} = AX$

<u>Valeurs propres et vecteurs propres de A</u> :