04.0008.C

① $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Recherche de valeurs propres :

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$= (5-\lambda) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \left[(-4-\lambda)(5-\lambda) + 6 \times 3 \right]$

$= (5-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right)$

$P(\lambda) = (5-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$

Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{5, -1, 2\}$

A est diagonalisable et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

② Recherche de valeurs propres. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- $AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 6b = -a \\ 3a + 5b = -b \\ 3a + 6b + 5c = -c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 6b = 0 \\ 3a + 6b + 5c = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left((-2, 1, 0)\right)$

- $AX = 2X \iff \begin{cases} -4a - 6b = 2a \\ 3a + 5b = 2b \\ 3a + 6b + 5c = 2c \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 6b + 3c = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$

Donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left((1, -1, 1)\right)$

- $AX = 5X \iff \begin{cases} -4a - 6b = 5a \\ 3a + 5b = 5b \\ 3a + 6b + 5c = 5c \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 9a + 6b = 0 \\ a = 0 \\ 3a + 6b = 0 \end{cases}$

$\iff a = 0 \ , \ b = 0$

Donc $E_5 = \mathrm{Vect}\left((0, 0, 1)\right)$

On a :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

et $A = PDP^{-1}$

donc,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ 5^n - 2^n & 2.5^n - 2^{n+1} & 5^n \end{pmatrix}$$

③ On pose,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

On a,

$$X_{n+1} = A X_n$$

On conjecture $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

<u>Récurrence</u>

=> Initialisation : $X_1 = A X_0$ ok !

=> Hérédité : On suppose $X_n = A^n X_0$ pour un n fixé.
Prouvons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

On a : $X_n = A^n X_0$
or $A X_n = X_{n+1}$ et $A A^n = A^{n+1}$
donc $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$

$\Rightarrow$ Conclusion : pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $X_n = A^n X_0$.

Donc

$$u_n = \left(2.(-1)^n - 2^n\right) u_0 + \left(2.(-1)^n - 2^{n+1}\right) v_0$$

$$v_n = \left((-1)^{n+1} + 2^n\right) u_0 + \left((-1)^{n+1} + 2^{n+1}\right) v_0$$

$$w_n = \left(5^n - 2^n\right) u_0 + \left(2.5^n - 2^{n+1}\right) v_0 + 5^n . w_0$$