04.0007.C

1) $P(\lambda) = (1-\lambda)^3$

donc $S_p(A) = \{1\}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X_3$$

uniquement 2 vecteurs propres donc pas diagonalisable.

2) on cherche X_2 tq $AX_2 = X_1 + X_2$

donc $\begin{cases} x = 0 + x \\ -z = -1 + y \\ y + 2z = 1 + z \end{cases} \iff \boxed{1 - z = y}$

donc $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ 1-z \\ z \end{pmatrix}$ on choisit $x = z = 0$

on a alors $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $A = Q\,T\,Q^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $A^n = Q\, T^n Q^{-1}$

avec $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$