04.0004.C

1) $\det(M) = 0$ donc M n'est pas inversible
donc f n'est pas inversible.

2) $Sp(M) = \{0, 1, 2\}$

donc M est diagonalisable

Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre 2 est $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) On trouve bien $Sp(M') = \{0, 1, 2\}$.

avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) On a $M = PDP^{-1}$ et $M' = P'D'P'^{-1}$

or $D = D'$

donc $P^{-1}MP = P'^{-1}M'P'$ $\Leftrightarrow$ $M' = \underbrace{P'P^{-1}}_{Q} M \underbrace{PP'^{-1}}_{Q^{-1}}$