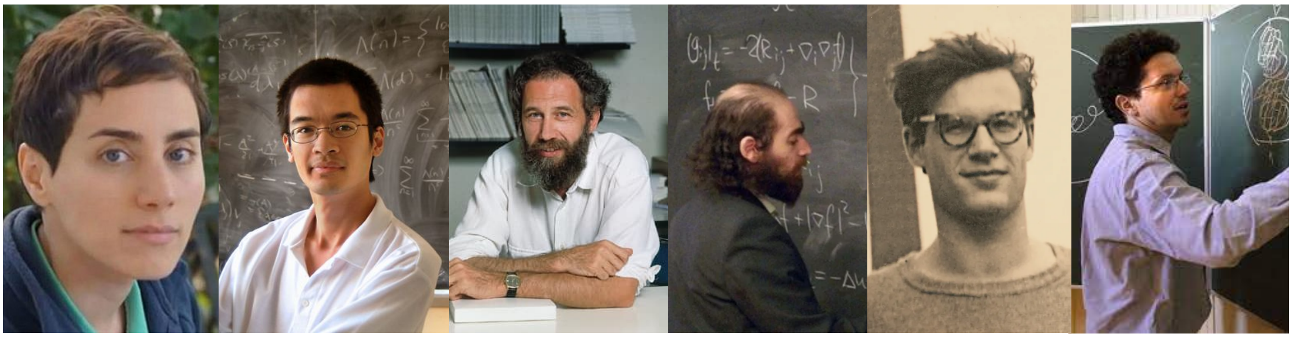
Les suites numériques

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Résumé

Une suite est un ensemble de nombres, indexé par les entiers naturels. On va apprendre comment définir une suite et l'étudier. On y verra notamment l'étude du sens de variation, la représentation de suites, la notions de limite ainsi que quelques grands types de suites.

Table des matières

[1] version du 13 décembre 2024

1 Généralités sur les suites

1.1 Différents modes de description d'une suite

Qu'est ce qu'une suite ?

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, qui forme un ensemble de nombres.

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

- u_n est le terme de rang n de la suite u
- (u_n) est la suite u elle même.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels peut être décrite par une formule du type

$$u_n = f(n)$$

pour tout entier naturel n, où f est une certaine fonction. **La suite est alors définie de manière explicite.** Dans ce cas, on obtient directement la valeur d'un terme donné en remplaçant n par une valeur précise.

Par exemple, si pour tout entier naturel n,

$$u_n = n^2 - 4n + 3$$

on obtient directement la valeur de u_3 en remplaçant n par 3 :

$$u_3 = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0.$$

Si on veut représenter graphiquement une telle suite, on place dans le plan rapporté à un repère orthonormé les points de coordonnées $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$ et de manière générale tous les points de coordonnées (n, u_n), $n \in \mathbb{N}$. On peut éventuellement s'aider du graphe de la fonction f.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels peut aussi être décrite par la donnée de son premier terme et une formule du type

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout entier naturel n, où f est une certaine fonction. **La suite est alors definie par une relation de recurrence.**

Dans ce cas si on veut connaître la valeur de u_3,on doit connaître la valeur de u_2 et si on veut connaître la valeur de u_2, on doit connaître la valeur de u_1 et si on veut connaître la valeur de u_1, on doit connaître la valeur de u_0. On part donc de u_0 puis on calcule les termes de la suite l'un après l'autre, de proche en proche.

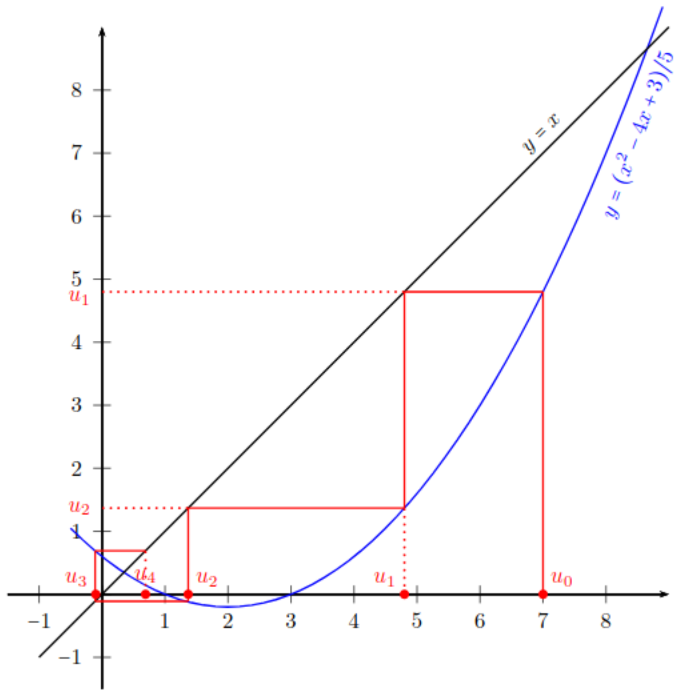
Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{5} \quad \text{et} \quad u_0 = 7,$$

pour calculer u_3 nous devons calculer tout d'abord u_1, puis u_2. Pour représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on procede en plusieurs etapes.

- On considere la fonction f definie par
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{5}$$
- on construit la courbe représentative de f ainsi que la droite d'équation $y = x$
- on place u_0 sur l'axe des abscisses
- on place le point de coordonees (u_0, u_1) avec $u_1 = f(u_0)$

- on repere l'abscisse du point appartenant à la droite d'équation $y = x$ et ayant pour ordonnée u_1
- on place le point de coordonees (u_1, u_2) avec $u_2 = f(u_1)$
- et ainsi de suite.



1.2 Suites minorées, majorées, bornées

Définition 1 (Suite minorée).
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si et seulement si il existe un reel $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \geq m.$$

Le reel m s'appelle un minorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = 7n^2 + 1.$$

Nous pouvons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Soit n un entier naturel naturel. On a donc

$$\begin{aligned} n^2 \geq 0 &\iff 7n^2 \geq 0 \\ &\iff 7n^2 + 1 \geq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

Définition 2 (Suite majorée).
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si il existe un reel $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq M.$$

Le reel M s'appelle un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = -3n + 4.$$

Nous pouvons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Soit n un entier naturel naturel. On a donc

$$\begin{aligned} n \geq 0 &\iff -3n \leq 0 \\ &\iff -3n + 4 \leq 4 \\ &\iff u_n \leq 4 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 4$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.

> **Définition 3** (Suite bornée)**.**
> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois majorée et minorée. Il existe donc deux reels m et M tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
>
> $$m \leq u_n \leq M.$$

Exemple 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{3n+14}{n+5}.$$

Nous pouvons montrer que pour tout entier naturel n,

$$\frac{14}{5} \leq u_n < 3.$$

Soit n un entier naturel naturel. On a donc

$$u_n - \frac{14}{5} = \frac{3n+14}{n+5} - \frac{14}{5} = \frac{5(3n+14) - 14(n+5)}{5(n+5)} = \frac{n}{5(n+5)}.$$

Puis $\frac{n}{5(n+5)} \geq 0$, on en deduit que $u_n - \frac{14}{5} \geq 0$ et donc que $u_n \geq \frac{14}{5}$. Ensuite

$$u_n - 3 = \frac{3n+14}{n+5} - 3 = \frac{(3n+14) - 3(n+5)}{(n+5)} = \frac{-1}{n+5}.$$

Puis

$$\frac{-1}{n+5} < 0,$$

on en deduit que

$$u_n - 3 < 0 \quad \text{et donc que} \quad u_n < 3.$$

On a montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\frac{14}{5}$ et 3.

1.3 Variations d'une suite

> **Définition 4** (Suite constante)**.**
> La suite (u_n) est **constante** si et seulement si pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Exemple 4.
La suite (u_n) definie par $u_n = 4$ est une suite constante. Tous les termes de la suite ont comme valeur 4.

Définition 5 (Suite croissante)**.**
La suite (u_n) est **croissante** si et seulement si pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$. On dit que la suite (u_n) est **strictement croissante** si et seulement si pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$.

Exemple 5.
La suite (u_n) definie par $u_n = -3n+5$. Nous allons étudier les variations de (u_n).

$$\begin{aligned} n \leq n+1 &\iff -3n \leq -3(n+1) \\ &\iff -3n+5 \leq -3(n+1)+5 \\ &\iff u_n \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

Définition 6 (Suite croissante)**.**
La suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si pour tout entier n, $u_n \geq u_{n+1}$. On dit que la suite (u_n) est **strictement décroissante** si et seulement si pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$.

Exemple 6.
La suite (v_n) definie par

$$v_n = -3n^2 - 4n.$$

Nous allons étudier les variations de (v_n).

$$\begin{aligned} n < n+1 &\iff -4n > -4(n+1) \\ n < n+1 &\iff n^2 < (n+1)^2 \\ &\iff -2n^2 > -2(n+1)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$-2n^2 - 4n > -2(n+1)^2 - 4(n+1).$$

La suite (v_n) est donc decroissante.

Définition 7 (Suite monotone)**.**
La suite (u_n) est **monotone** si et seulement si la suite (u_n) est croissante ou décroissante. On dit que la suite (u_n) est **strictement monotone** si et seulement si la suite (u_n) est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 7.
La suite (u_n) definie par

$$u_n = (-1)^n \times n.$$

Etudier les variations de (u_n).

$$\begin{aligned} u_0 &= (-1)^0 \times 0 = 0 \\ u_1 &= (-1)^1 \times 1 = -1 \\ u_2 &= (-1)^2 \times 2 = 2 \\ u_3 &= (-1)^3 \times 3 = -3 \\ u_4 &= (-1)^4 \times 4 = 4 \end{aligned}$$

La suite (u_n) n'est ni croissante ni decroissante. Elle n'est pas monotone.

Methodes pour etudier les variations d'une suite

Nous allons voir quelques techniques pour étudier le sens de variation d'une suite.

Methode 1 – Majoration ou minoration directe

La technique consiste à comparer directement u_n et u_{n+1}. Quand l'expression de u_n en fonction de n ne contient qu'une seule fois la lettre n, on part de l'inégalité $n < n+1$ puis par opérations successives, on parvient à une inégalité entre u_n et u_{n+1}.

Il est utile de voir deux types d'exemple pour cette methode.

Exemple 8.
Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on multiplie les deux membres de l'inégalité $1 < 2$ par le réel strictement positif 2^n, on obtient $2^n < 2^{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n < 2^{n+1}$ et donc la suite (2^n) est strictement croissante.

Exemple 9.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = 4 - \frac{17}{\sqrt{2^n+1}}.$$

Nous allons étudier les variations de la suite (u_n). Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
n < n+1 &\iff 2^n < 2^{n+1} \\
&\iff 2^n + 1 < 2^{n+1} + 1 \\
&\iff \sqrt{2^n+1} < \sqrt{2^{n+1}+1} \\
&\iff \frac{1}{\sqrt{2^n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}+1}} \\
&\iff \frac{-17}{\sqrt{2^n+1}} < \frac{-17}{\sqrt{2^{n+1}+1}} \\
&\iff 4 - \frac{17}{\sqrt{2^n+1}} < 4 - \frac{17}{\sqrt{2^{n+1}+1}} \\
n < n+1 &\iff u_n < u_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$. On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Methode 2 – Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$

La technique consiste à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour pouvoir ensuite comparer u_{n+1} et u_n. On a les résultats immédiats suivants :

- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemple 10.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{3^n}{(n+1)^2}.$$

Tout d'abord, $u_1 - u_0 = -\frac{1}{4}$ et donc $u_1 < u_0$. Puis, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, on a

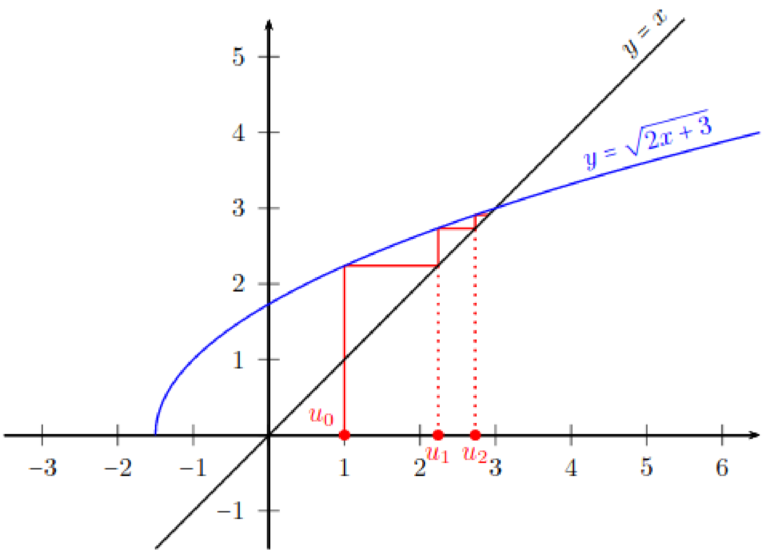
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3^{n+1}}{(n+2)^2} - \frac{3^n}{(n+1)^2} \\
&= \frac{3^{n+1}(n+1)^2 - 3^n(n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} \\
&= 3^n \frac{3(n+1)^2 - (n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} \\
&= 3^n \frac{3(n^2+2n+1) - (n^2+4n+4)}{(n+1)^2(n+2)^2} \\
&= 3^n \frac{3n^2+6n+3-n^2-4n-4)}{(n+1)^2(n+2)^2} \\
u_{n+1} - u_n &= 3^n \frac{2n^2+2n-1}{(n+1)^2(n+2)^2}
\end{aligned}$$

Or pour $n \geq 1$ on a $2n^2 + 2n - 1 > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi, $u_1 < u_0$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n > 0$ ou encore $u_{n+1} > u_n$. On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.

Exemple 11.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}.$$

1) Pour commencer représentons graphiquement la suite (u_n).



2) Nous allons à present montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et

$$1 \leq u_n < 3.$$

- Puisque $u_0 = 1$, le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que u_n existe et que $1 \leq u_n < 3$ et montrons que u_{n+1} existe et que $1 \leq u_{n+1} < 3$. Puisque u_n existe et que $u_n \geq 1$, on a en particulier $2u_n + 3 \geq 0$. Et alors u_{n+1} existe. Ensuite,

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n < 3 &\iff 2 \times 1 + 3 \leq 2u_n + 3 < 2 \times 3 + 3 \\ &\iff 5 \leq 2u_n + 3 < 9 \\ &\iff \sqrt{5} \leq \sqrt{2u_n + 3} < \sqrt{9} \\ &\iff \sqrt{5} \leq u_{n+1} < 3 \\ &\iff 1 \leq u_{n+1} < 3 \quad \text{car} \quad \sqrt{5} > 1. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $1 \leq u_n < 3$.

3) Pour finir montrons que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{(u_n + 1)(3 - u_n)}}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}.$$

Ce qui nous permettra d'en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n+3} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{2u_n+3} - u_n)(\sqrt{2u_n+3} + u_n)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} \\ &= \frac{(\sqrt{2u_n+3})^2 - u_n^2}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} \\ &= \frac{(u_n+1)(3-u_n)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} \end{aligned}$$

Puisque $1 \leq u_n \leq 3$, on a $3 - u_n > 0$, $u_n + 1 > 0$, et $\sqrt{2u_n+3} + u_n > 0$. Donc la difference $u_{n+1} - u_n$ est egalement strictement positive, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Methode 3 – Etude de la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 pour des suites strictement positives

La technique consiste à étudier le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour pouvoir ensuite comparer u_{n+1} et u_n. On a les résultats immédiats suivants :

- Si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite (u_n) est décroissante.
- Si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemple 12.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier non nul n par

$$u_n = \frac{2^n}{n!}$$

où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Nous allons etudier les sens de variation de cette suite.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = 2 \times \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n \times (n+1)} = \frac{2}{n+1}$$

puis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{2}{n+1} - 1 = \frac{2-(n+1)}{n+1} = \frac{1-n}{n+1}$$

Puisque $n \geq 1$, on en deduit que $\frac{1-n}{n+1} \leq 0$, et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. On en deduit donc que $u_{n+1} \leq u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite (u_n) est decroissante.

Methode 4 – Si $u_n = f(n)$, étude des variations de f

Si la suite est du type $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, où f est une certaine fonction définie sur $[0; +\infty[$, on peut utiliser les variations de la fonction f pour préciser les variations de la suite (u_n).

Si la fonction f est croissante (resp. décroissante, strictement croissante ...),
alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante, strictement croissante ...).

Exemple 13.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par

$$u_n = \frac{n^4+4n+2}{n+1}.$$

Nous allons etudier le sens de variation de la suite (u_n). Pour tout reel positif x, posons

$$f(x) = \frac{x^2+4x+2}{x+1}$$

de sorte que pour tout entier naturel non nul n par $u_n = f(n)$. La fonction est derivable sur $[0;+\infty]$ en tant que quotient de fonctions derivables sur $[0;+\infty[$ dont le denominateur ne s'annule pas. On a donc pour tout reel $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+4)(x+1)-(x^2+4x+2)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+6x+4-x^2-4x-2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

La derivee f' de f est une fonction strictement postive sur $[0;+\infty[$. On en deduit que la fonction f esr strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Puisque la fonction est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leq n\ n+1 \ \Rightarrow\ f(n) < f(n+1) \ \Rightarrow\ u_n < u_{n+1}.$$

Ainsi, tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

2 Raisonnement par recurrence

Il est possible d'illustrer le raisonnement par récurrence avec une image. Imnaginons que nous ayons une très grande echelle. Nous souhaitons prouver par recurrence que nous sommes capable de monter jusqu'en haut de l'echelle.

L'initialisation consistera à prouver que l'on est capable d'attraper un barreau donné de l'echelle. L'hérédité quant à elle consistera à supposer que l'on est capable d'attraper un barreau quelconque de l'échelle et d'éssayer de montrer que l'on est capable d'attraper le barreau suivant. Une fois l'initialisation et l'heredité validées, on aura montrer que l'on est capable de monter tout en haut de l'échelle.

Théorème 1.
Soit P_n une propriété à demontrer, et n_0 un entier.

Initialisation : *Si la propriété P_{n_0} est vraie pour le rang n_0,*

Hérédité : *et si la véracité de la propriété P_k pour un $k \geq n_0$ fixe implique que la propriété P_{k+1} est vraie*

Conclusion : *alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$ la propriété P_n est vraie.*

La propriété P_n peut être de différentes natures, c'est a dire une égalité, une inégalité, une proposition, etc. Les conditions d'intialisation et d'hérédité sont indispensables. Et enfin la condition d'hérédité est une implication, on suppose que P_k est vraie pour un k donné fixe puis on tente de montrer que P_{k+1} est vraie.

Exemple 14.
Nous allons montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$ la propriété est vérifiée immédiatement. Pour $n = 1$ on a d'une part

$$\sum_{i=0}^{1} i^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$

et d'autre part

$$\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

La propriété P_1 est vraie.
Hérédité : Supposons que pour un entier donné fixe $k \geq 1$ la propriété P_k soit vraie. On a donc

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

On souhaite démontrer que la proposition P_{k+1} est egalement vraie. Pour cela on a

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \sum_{i=0}^{k} i^2 + (k+1)^2.$$

Or on a supposé que P_k est vraie, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left(k(2k+1)+6(k+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
\sum_{i=0}^{k+1} i^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

La propriété P_{k+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3 Limites de suites

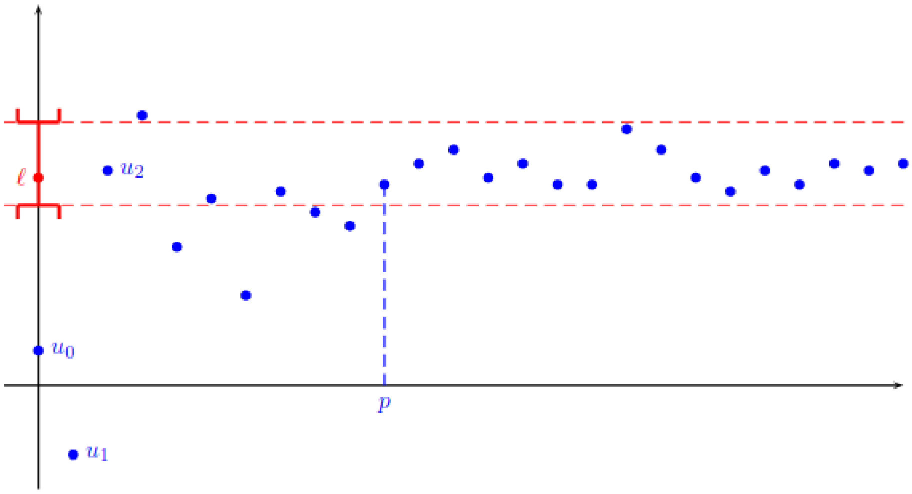
3.1 Convergence et divergence d'une suite

Définition 8 (Suite convergente).
Une suite admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

On dit que la suite converge vers ℓ, ou encore que la suite est convergente.

Interprétation graphique. On place ℓ sur l'axe des ordonnées puis on se donne un intervalle ouvert I quelconque contenant ℓ. A partir d'un certain rang p dépendant de l'intervalle I que l'on s'est donné, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle I. Pour n'importe que intervalle ouvert I contenant ℓ, aussi petit soit-il, on peut fournir un tel rang p.



Théorème 2.
Si une suite converge vers un reel ℓ, alors le nombre ℓ est unique.

Exemple 15.
Montrons en revenant à la définition que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2.$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3}.$$

Soit ϵ un réel strictement positif. On note I l'intervalle $]2-\epsilon, 2+\epsilon[$. L'intervalle I est centré autour de 2. On a alors

$$\begin{aligned} u_n \in I \quad &\iff \quad 2-\epsilon < u_n < 2+\epsilon \\ &\iff \quad -\epsilon < u_n - 2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Or,

$$u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+3} - 2 = \frac{(2n+1)-2(n+3)}{n+3} = \frac{2n+1-2n-6}{n+3} = -\frac{5}{n+3}.$$

Ainsi

$$u_n \in I \iff -\epsilon < -\frac{5}{n+3} < \epsilon.$$

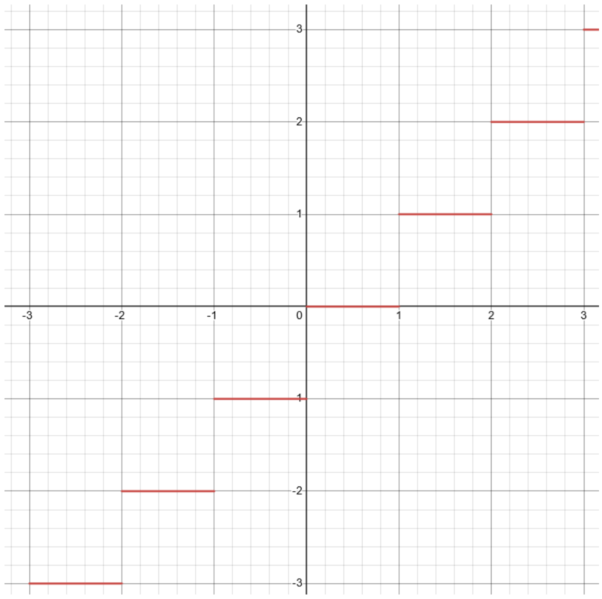
Puisque n est un entier naturel, $\dfrac{-5}{n+3} < 0$ et en particulier l'inégalité $\dfrac{-5}{n+3} < \epsilon$ est vraie (nous n'avons pas oublié que ϵ est un réel strictement positif). Il reste

$$\begin{aligned} -\epsilon < -\frac{5}{n+3} \quad &\iff \epsilon > \frac{5}{n+3} \\ &\iff n+3 > \frac{5}{\epsilon} \quad \text{car} \quad \epsilon > 0 \\ &\iff n > \frac{5}{\epsilon} - 3. \end{aligned}$$

Soit p un entier strictement supérieur à $\frac{5}{\epsilon} - 3$. Si $\dfrac{5}{\epsilon} - 3 < 0$, on peut prendre $p = 0$, autrement si $\dfrac{5}{\epsilon} - 3 \geq 0$, on peut prendre

$$p = E\left(\frac{5}{\epsilon} - 3\right),$$

où E designe la fonction partie entiere (cf. graphe ci-dessous).



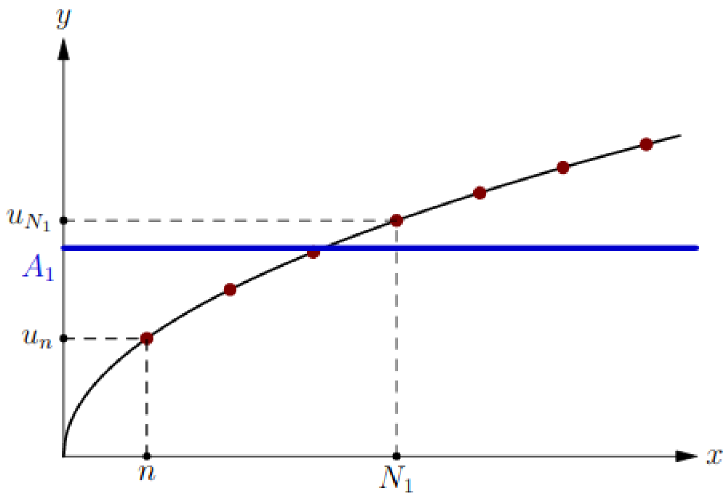
Pour tout entier naturel n tel que $n \geq p$, on a encore $n > \frac{5}{\epsilon} - 3$ et donc $u_n \in I$. Ainsi, tout intervalle ouvert de centre 2 contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang et donc

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

Définition 9 (Suite divergente)**.**
Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Autrement dit, pour tout réel A il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, on ait $u_n > A$. On note

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

On dit que la suite est diverge, ou encore que la suite est divergente.



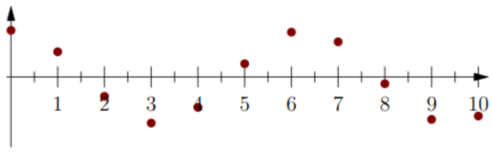
De même, une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Exemple 16.
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$. En effet pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) pour $n > \sqrt{A}$.

Remarques.
Une suite n'a pas nécessairement de limite.

Exemple 17.
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ alterne entre les valeurs -1 et 1. Cette suite n'a pas de limite.

De même la suite définie par $v_n = \cos(n)$ sur $\mathbb{N}$ n'a pas de limite, ses termes ne s'accumulent pas autour d'aucune valeur et sont uniformément répartis dans l'intervalle $[-1;1]$.



3.2 Opérations et limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites definie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\ell,\ \ell' \in \mathbb{R}$.

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
(v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

(u_n) a pour limite	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
(v_n) a pour limite	0 en etant > 0	0 en etant > 0	0 en etant < 0	0 en etant < 0	0
$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

Théorème 3 (Limites de suites de references).

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\textit{Pour tout } k > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

3.3 Quelques exemples

Exemple 18.
Soit (u_n) la suite definie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{2n^2 - 5n + 7}{3n^2 + n + 1}.$$

Determinons la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$. Nous avons donc pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \frac{2n^2 - 5n + 7}{3n^2 + n + 1} = \frac{2n^2\left(1 - \frac{5}{2n} + \frac{7}{2n^2}\right)}{3n^2\left(1 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2}\right)} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{5}{2n} + \frac{7}{2n^2}}{1 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2}}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{5}{2n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{2n^2} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{2n} + \frac{7}{2n^2}\right) = 1.$$

De meme

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2}\right) = 1.$$

En effectuant le quotient on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{5}{2n} + \frac{7}{2n^2}}{1 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Finalement nous pouvons conclure sur la limite de (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{5}{2n} + \frac{7}{2n^2}}{1 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2}} = \frac{2}{3}.$$

Exemple 19.
Soit (u_n) la suite definie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sqrt{4n^2 + n + 1} - n.$$

Determinons la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
Pour tout entier naturel non nul n.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{4n^2 + n + 1} - n \\ &= \sqrt{4n^2\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}\right)} - n \\ &= \sqrt{4n^2}\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} - n \\ &= 2n\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} - n \\ u_n &= n\left(2\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} - 1\right). \end{aligned}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n^2} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}\right) = 1$$

alors
$$\lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}}-1 = 2\sqrt{1}-1 = 1.$$
Comme
$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$$
on peut conclure que
$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

Dans l'exemple precedent, nous etions en face d'une forme indeterminee du type $+\infty-\infty$. Le premier terme $\sqrt{4n^2+n+1}$ peut etre percu lorsque n tend vers $+\infty$ comme equivalent à $\sqrt{4n^2} = 2n$, et donc la difference $\sqrt{4n^2+n+1}-n$ peut etre assimimilee à $2n-n = n$.

Cette remarque **aproximative** doit etre verifiee par le calul. La technique consistait ici a mettre le **terme de plus haut degre en facteur**. Il existe d'autre techniques pour lever ce type de formes indeterminees.

Dans l'exemple suivant nous allons voir une methode qui uitilise la **quantité conjuguée**.

Exemple 20.
Soit (u_n) la suite definie pour tout entier naturel n par
$$u_n = \sqrt{n^2+n+1}-n.$$
Determinons la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
Pour tout entier naturel n,
$$u_n = \sqrt{n^2+n+1}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$
$$= \frac{n+1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$
$$= \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$$
Or on sait que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0,$$
donc
$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1 = 2.$$
D'autre part,
$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1.$$
Nous pouvons alors conclure sur la limite de la suite (u_n)
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

3.4 Limites et comparaison

On admettra le theoreme suivant.

Théorème 4.
Soient les suites (u_n), (v_n) *telles que*

- *à partir d'un certain rang* $u_n \leq v_n$
- *la suite* (u_n) *converge ver un reel* ℓ
- *la suite* (v_n) *converge ver un reel* ℓ'

$$\text{alors} \quad \ell < \ell'.$$

Nous allons à present considerer le cas d'inegalites avec des limites infinies.

Théorème 5.
Soient les suites (u_n) *et* (v_n) *telles que*

Si *à partir d'un certain rang* $u_n \leq v_n$ ***et*** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Si *à partir d'un certain rang* $u_n \leq v_n$ ***et*** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 21.
Soit (u_n) la suite definie par $u_0 = 0$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 2u_n + 3.$$

Nous allons montrer par recurrence que pour tout entier naturel n, nous avons $u_n \geq n$.

- Puisque $u_0 = 0$, l'inegalite est verifiee pour le rang $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \geq n$ et montrons que $u_{n+1} \geq n + 1$.

$$\begin{aligned} u_n \geq n &\Leftrightarrow 2u_n + 3 \geq 2n + 3 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \geq 2n + 3 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \geq n + 1 + n + 2 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \geq n + 1 \quad \text{car} \quad n + 2 \geq 0. \end{aligned}$$

- On a donc montre par recurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n \geq n.$$

Avec cette inegalite et le fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on en deduit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Calculons quelques termes de cette suite (u_n), mais avec cette fois comme premier terme $u_0 = -4$.

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_0 + 3 = 2 \times (-4) + 3 = -5 \\ u_2 &= 2u_1 + 3 = 2 \times (-5) + 3 = -7 \\ u_3 &= 2u_2 + 3 = 2 \times (-7) + 3 = -11 \\ u_4 &= 2u_3 + 3 = 2 \times (-11) + 3 = -19 \end{aligned}$$

Il semble que les termes de la suite verifient l'inegalite suivante

$$u_n \leq -n - 4.$$

Essayons de le montrer par recurrence.

- Puisque $u_0 = -4$ et que $-0 - 4 = -4$, l'inegalite est verifiee pour le rang $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \geq -n-4$ et montrons que $u_{n+1} \geq -n-5$.

$$\begin{aligned} u_n \leq -n-4 &\Leftrightarrow 2u_n + 3 \leq 2(-n-4) + 3 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leq -2n-5 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leq -n-5-n \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leq -n-5 \quad \text{car} \quad -n \leq 0. \end{aligned}$$

- On a donc montre par recurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leq -n-5.$$

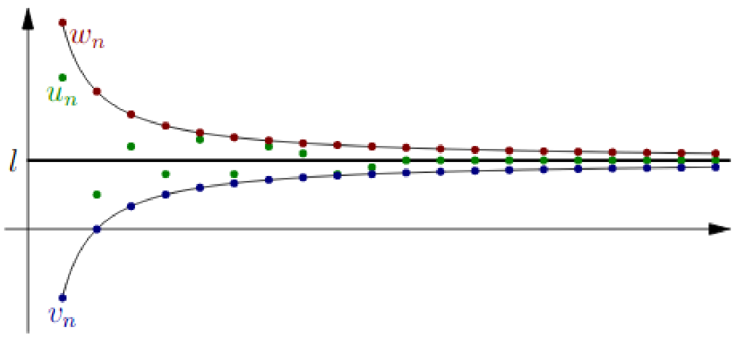
Avec cette inegalite et le fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} -n-4 = -\infty$, on en deduit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty.$$

Théorème 6 (Theoreme des « des gendarmes »).
Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que

- *à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$*
- *(v_n) et (w_n) ont la même limite finie ℓ*

alors la suite (u_n) converge et a pour limite ℓ.



Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Comme la suite (v_n) converge vers ℓ, l'intervalle I contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang n_0.
- De même pour la suite (w_n), à partir d'un certain rang n_1 tous les termes $w_n \in I$.
- On pose $N = \max(n_0, n_1)$.
  - Pour $n \geq N$ tous les termes v_n et w_n sont donc dans l'intervalle I.
  - Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

  d'où à partir du rang N tous les termes $u_n \in I$.
- Donc d'après la définition, la suite (u_n) converge et sa limite est alors ℓ.

Exemple 22.
Soit (u_n) la suite definie pour tout entier naturel non nul n par
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$
Montrons que la suite (u_n) converge et determinons sa limite.
Pour tout entier naturel non nul n, $(-1)^n$ est egal à 1 ou -1. Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons
$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$
ce qui nous permet d'en deduire
$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$
Puisque
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$
le theoreme des gendarmes permet d'affirmer que la suite (u_n) converge et que la limite
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

3.5 Convergence des suites monotones

On admettra le theoreme suivant.

Théorème 7.
Soit une suite (u_n).

- *Si la suite (u_n) est **croissante** et **majorée**, alors la suite (u_n) **converge**.*
- *Si la suite (u_n) est **decroissante** et **minorée**, alors la suite (u_n) **converge**.*

Exemple 23.
Soit (u_n) la suite definie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}.$$
On a deja montre precedement pour cette suite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe est compris entre 1 et 3. De plus nous avons reussi à montrer que la suite est strictement croissante.
Essayons à present de montrer que la suite (u_n) et converge vers une limite à determiner.
La suite (u_n) est croissante et majorée par 3. Donc la suite converge vers un reel ℓ. On peut alors en deduire que
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell.$$
D'autre part, quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt{2u_n+3}$ tend vers $\sqrt{2\ell+3}$. Nous pouvons donc ecrire
$$\ell = \sqrt{2\ell+3}.$$
Ceci impose $\ell \geq 0$, nous avons donc
$$\begin{aligned} \ell = \sqrt{2\ell+3} &\Leftrightarrow \ell^2 = 2\ell+3 \\ &\Leftrightarrow \dots \quad \text{(resolution de l'equation du second degre)} \\ &\Leftrightarrow \ell_1 = 3 \quad \text{car} \quad \ell \geq 0. \end{aligned}$$
Donc la suite (u_n) converge vers 3.

4 Les grands types de suites

4.1 Suites arithmétique

Une suite arithmétique est une suite dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant un nombre appelé raison.

Définition 10 (Suite arithmétique).
Une suite (u_n) est **arithmetique** lorsque l'on passe d'un terme quelconque au suivant en additionnant toujours par le même nombre r, appelé la raison. Pour tout entier naturel n on a

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Une suite arithmetique est donnée par son premier terme u_0 et sa raison r.

Exemple 24.
Soit (u_n) une suite arithmetique de raison 3. Si $u_0 = 2$, alors on a

$$u_1 = 2+3 = 5\ , \qquad u_2 = 5+3 = 8\ , \qquad u_3 = 8+3 = 11.$$

On passe bien d'un terme au suivant en ajoutant 3.

Exemple 25.
Soit (u_n) la suite definie pour tout entier naturel n par

$$u_n = 2n+7.$$

Nous allons montrer que cette suite est arithmetique en precisant sa raison et son premier terme.

$$u_{n+1} - u_n = (-2(n+1)+7) - (-2n+7) = -2(n+1)+7+2n-7 = -2n-2+7+2n-7 = -2$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -2$. On en déduit que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -2. Son premier terme est $u_0 = 7$.

Une suite arithmétique est définie par une relation de récurrence. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Ainsi, pour calculer u_{22}, on doit connaître u_{21}, et pour connaître u_{21} on doit connaître u_{20}, etc. Il serait donc utile d'etre capable d'exprimer directement u_n en fonction de n.

Théorème 8.
Soit une suite arithmetique (u_n) de raison r et de premier terme u_0. On peut ecrire u_n sous la forme suivante

$$u_n = u_0 + nr$$

avec $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas general on a

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

avec $p \in \mathbb{R}$.

Exemple 26.
Soit (u_n) une suite arithmétique. On sait que $u_5 = -2$ et $u_9 = -14$. Déterminons u_n en fonction de n.
Notons r la raison de la suite arithmétique (u_n). On sait que

$$u_9 = u_5 + (9-5)r = u_5 + 4r$$

et donc $r = -3$. On sait alors que pour tout entier naturel n

$$u_n = u_5 + (n-5)r = -2 - 3(n-5) = -2 - 3n + 15 = -3n + 13.$$

Pour tout entier naturel n,

$$u_n = -3n + 13.$$

Théorème 9.
Une suite arithmetique de raison r est

- *strictement croissante, si $r > 0$;*

- *strictement decroissante, si $r < 0$;*
- *constante, si $r = 0$.*

Exemple 27.
La suite (u_n) définie précédement pour tout entier naturel n par

$$u_n = -3n + 13$$

a une raison $r = -3$ Cette suite est donc décroissante.

4.2 Suites geometrique

Définition 11 (Suite géométrique)**.**
Une suite (u_n) est **géométrique** lorsque l'on passe d'un terme quelconque au suivant en multipliant toujours par le même nombre q, appelé la raison. Pour tout entier naturel n on a

$$u_{n+1} = u_n \times q.$$

Une suite géométrique est donnée par son premier terme u_0 et sa raison q.

Exemple 28.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3. Si $u_0 = 2$, alors on a

$$u_1 = 2 \times 3 = 6\ , \qquad u_2 = 6 \times 3 = 18\ , \qquad u_3 = 18 \times 3 = 54.$$

On passe bien d'un terme au suivant en multipliant 3.

Théorème 10.
Soit une suite géométrique (u_n) donnée par son premier terme u_0 et sa raison q. Son terme général s'écrit :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas general on a

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

avec $p \in \mathbb{R}$.

Exemple 29.
On s'intéresse à l'évolution de la population d'une ville. En 2007, la population de cette ville est estimée à 45000 habitants. On considere une diminution de la population de 3% par an. On note toujours $u_0 = 45000$ la population en 2007, et u_n la population en $(2007 + n)$.
La population en 2008 est

$$u_1 = 45000 \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 43650$$

et en 2009

$$u_2 = 45000 \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 42341.$$

La suite (u_n) est une suite geometrique de raison

$$1 - \frac{3}{100} = 0,97$$

et de premier terme $u_0 = 45000$. Son expression est

$$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

ou encore

$$u_n = 45000 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)^n.$$

Selon ce modèle on veut savoir en quelle année la population de la ville sera inférieure à 30000 habitants, c'est a dire

$$u_n \leq 30000.$$

On essaie pour plusieurs valeurs de n, on trouve

$$u_{13} = 30286 \quad \text{et} \quad u_{14} = 29378.$$

C'est donc a partir de $2021 (= 2007 + 14)$ que la population de la ville sera inférieure à 30000 habitants.
En ce qui concerne les variations des suites geometriques nous avons les resultats suivants.

Théorème 11.
Soit une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q.

Cas où $u_0 > 0$:

Si la raison est supérieure à 1, alors la suite géométrique est croissante ;

Si la raison est comprise entre 0 et 1, alors la suite géométrique est décroissante.

Cas où $u_0 < 0$:

Si la raison est supérieure à 1, alors la suite géométrique est decroissante ;

Si la raison est comprise entre 0 et 1, alors la suite géométrique est croissante.

Cas où $u_0 = 0$: *La suite est monotone et egale a 0.*

Exemple 30.
La suite (u_n) définie précédement pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

et de premier terme $u_0 = 45000$. Comme le premier terme est positif et la raison strictement inférieur à 1 on peut affirmer que la suite est strictement décroissante.

4.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 12.
Soient a et b deux réels. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b$$

et de terme initial u_0 est une suite arithmético-géométrique.

Proposition 1.
Soient (u_n) la suite de terme initial u_0 définie pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b$$

et ℓ le réel solution de l'équation $a\ell + b = \ell$. La suite (v_n) définie pour tout entier naurel n, par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.

Exemple 31.
Au 1er janvier 2018, une association comptait 2500 adhérents. Une étude a permis de modéliser l'évolution future du nombre d'adhérents de l'association. Chaque mois :

- 4% des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 80 nouvelles personnes adhérent à l'association.

On note u_n une estimation du nombre d'adhérents de l'association n mois après le 1er janvier 2018. La suite (u_n) définie par $u_0 = 2500$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,96u_n + 80$$

modélise l'évolution mensuelle du nombre d'adhérents de l'association. En effet au 1er janvier 2018, l'association comptait 2500 adhérents donc $u_0 = 2500$. Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 4% est

$$1 - \frac{4}{100} = 0,96$$

L'évolution mensuelle du nombre d'adhérents de l'association s'obtient à l'aide du montage suivant :

$$u_n \xrightarrow{\times 0{,}96 \text{ (perte de 4\% des adhérents)}} 0,96u_n \xrightarrow{+80 \text{ (nouvelles adhésions)}} \underbrace{0,96u_n + 80}_{u_{n+1}}$$

Ainsi, la suite (u_n) définie par $u_0 = 2500$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 0,96u_n + 80$ modélise l'évolution mensuelle du nombre d'adhérents de l'association.
Il apparaitra tres utile dans la suite de résoudre l'équation $0,96x + 80 = x$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 0,96x + 80 = x &\Leftrightarrow -0,04x = -80 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{80}{0,04} = 2000 \end{aligned}$$

On considère à présent la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : : $v_n = u_n - 2000$. Nous allons démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2000 \\ &= 0,96u_n + 80 - 2000 \\ &= 0,96u_n - 1920 \\ &= 0,96 \times (u_n - 2000) \\ &= 0,96v_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = 0,96v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 dont le premier terme $v_0 = 2500 - 2000 = 500$.

On en déduit alors une expression du terme général u_n en fonction de n. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,96$ et de premier terme $v_0 = 500$ donc pour tout entier naturel n, on a

$$v_n = 500 \times 0,96^n$$

Comme pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 2000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2000$ on en déduit que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 500 \times 0,96^n + 2000$$

Étudions le sens de variation de la suite (u_n). Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(500 \times 0,96^{n+1} + 2000\right) - (500 \times 0,96^n + 2000) \\ &= 500 \times 0,96^{n+1} - 500 \times 0,96^n \\ &= 500 \times 0,96^n \times (0,96 - 1) \\ &= -20 \times 0,96^n \end{aligned}$$

Or pour tout entier $n, -20 \times 0,96^n < 0$, donc pour tout entier $n, u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est strictement décroissante.
Enfin déterminons la limite de la suite (u_n). On a $0 < 0,96 < 1$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} 0,96^n = 0$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} 500 \times 0,96^n + 2000 = 2000$$

. Soit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2000.$$

La suite (u_n) converge vers 2000 . À partir d'un certain nombre de mois, le nombre d'adhérents de l'association sera chaque mois proche de 2000.

4.4 Suites adjacentes

Définition 13 (Suites adjacentes)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si

- l'une des deux suite est croissante,
- et l'autre suite est decroissante,
- et $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Théorème 12.
Deux suites adjacentes convergent et ont meme limite.

Exemple 32.
Montrons que les suites de terme general

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$

sont adjacentes. Etudions les variations de ces deux suites.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)!} \ > \ 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\left((n+1)!\right)} - u_n - \frac{1}{n(n!)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\left((n+1)!\right)} - \frac{1}{n(n!)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \times \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n(n!)} \\
&= \frac{1}{n!} \times \left(\frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n!} \times \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n!} \times \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n!} \times \frac{-1}{n(n+1)^2} \\
v_{n+1} - v_n &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \ < 0
\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est croissante. Etudions à present la limite de $v_n - u_n$.

$$v_n - u_n \ = \ u_n + \frac{1}{n(n!)} - u_n \ = \ \frac{1}{n(n!)}.$$

On a donc

$$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) \ = \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n(n!)} = 0.$$

On peut alors conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite.

4.5 Suites récurrentes lineaire homogene d'ordre 2

Théorème 13 (Suites recurrentes lineaire d'ordre 2)**.**
Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ *et* (u_n) *une suite definie par* $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'equation

$$r^2 - ar - b = 0$$

est appelee equation caracteristique.

- *Si l'equation caracteristique admet deux solutions reelles distincstes* r_1 *et* r_2*, alors il existe deux nombres reels* λ *et* μ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- *Si l'equation caracteristique admet une solution double* r*, alors il existe deux nombres reels* λ *et* μ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = \lambda r^n + \mu\, n r^n.$$
- *Si l'equation caracteristique admet deux solutions complexes (non reelles)* $r_1 = re^{i\theta}$ *et* $r_2 = re^{-i\theta}$*, avec* $r > 0$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *alors il existe deux nombres reels* λ *et* μ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = r^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right).$$

Exemple 33.
Etudier les suites suivantes.

1. $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$, avec $u_0 = 0, u_1 = 3$. L'équation caractéristique est $x^2 + x - 2 = 0$. Elle admet pour solutions les réels 1 et -2. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda + \mu(-2)^n.$$

En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = 3 \end{cases}$$

Donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n = 1 - (-2)^n$.

2. $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$, avec $u_0 = 5, u_1 = 6$. L'équation caractéristique est $x^2 - 6x + 9 = 0$. Elle admet pour solution double le réel 3. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)3^n.$$

En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda \quad = 5 \\ 3(\lambda + \mu) = 6 \end{cases}$$

Donc $\lambda = 5$ et $\mu = -3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n = 3^n(-3n + 5)$.

3. $u_{n+2} = 9u_n$, avec $u_0 = 5, u_1 = 1$. L'équation caractéristique est $x^2 - 9 = 0$. Elle admet pour solutions $3i$ et $-3i$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mu 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda = 5 \\ 3\mu = 1 \end{cases}$$

Donc $\lambda = 5$ et $\mu = \frac{1}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$u_n = 5 \cdot 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

5 Exercices

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

Cours et exercices rédigés par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).