

Travaux dirigés - Nombre complexe

Promotion 116

Exercice 1 Forme algébrique - Somme et produits

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2 + 5i) + (i + 3)$
2. $z_2 = 4(-2 + 3i) + 3(-5 - 8i)$
3. $z_3 = (2 - i)(3 + 8i)$
4. $z_4 = (1 - i)\overline{(1 + i)}$
5. $z_5 = i(1 - 3i)^2$
6. $z_6 = (1 + i)^3$

Indication ▼ Correction ▼

[14.0121]

Exercice 2

Mettre sous la forme algébrique $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ les nombres complexes suivants

1. $z_1 = \frac{3 + 6i}{3 - 4i}$
2. $z_2 = \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2$
3. $z_3 = \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}$
4. $z_4 = \frac{5 + 2i}{1 - 2i}$
5. $z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
6. $z_6 = \frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$
7. $z_7 = -\frac{2}{1 - i\sqrt{3}}$
8. $z_8 = \frac{1}{(1 + 2i)(3 - i)}$
9. $z_9 = \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$

Correction ▼

[14.0038]

Exercice 3

Mettre sous la forme $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) les nombres

$$\frac{3 + 6i}{3 - 4i} ; \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 + \frac{3 + 6i}{3 - 4i} ; \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}.$$

Indication ▼ Correction ▼

[14.0019]

Exercice 4

Ecrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Indication ▼ Correction ▼

[14.0020]

Exercice 5

Effectuer les calculs suivants :

- $(3 + 2i)(1 - 3i)$.
- Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
- $\frac{3 + 2i}{1 - 3i}$.
- Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Correction ▼

[14.0021]

Exercice 6

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Indication ▼ Correction ▼

[14.0023]

Exercice 7

On donne θ_0 un réel tel que $\cos(\theta_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Calculer, en fonction de θ_0 , le module et l'argument des nombres complexes

$$a = 3i(2 + i)(4 + 2i)(1 + i) \quad \text{et} \quad b = \frac{(4 + 2i)(-1 + i)}{(2 - i)3i}.$$

Correction ▼

[14.0037]

Exercice 8

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

- $z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$
- $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$
- $z_3 = 3e^{-\frac{7i\pi}{8}}$
- $z_4 = \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$
- $z_5 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$
- $z_6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)$
- $z_7 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}$
- z_8 , le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
- z_9 , le nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Correction ▼

[14.0039]

Exercice 9

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

- $z_1 = \frac{1 + i}{1 - i}$
- $z_2 = \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^3$
- $z_3 = (1 + i\sqrt{3})^4$
- $z_4 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$
- $z_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$

$$6. z_6 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i}$$

Correction ▼

[14.0045]

Exercice 10

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3 + 2i)(1 - 3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.
3. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

Correction ▼

[14.0041]

Exercice 11

Linéariser les expressions suivantes.

- | | | |
|-----------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $A(x) = \cos^3(x)$ | 5. $E(x) = \cos^2(x) \sin^2(x)$ | 9. $I(x) = \cos^2(x) \sin^3(x)$ |
| 2. $B(x) = \sin^3(x)$ | 6. $F(x) = \cos(x) \sin^3(x)$ | 10. $J(x) = \cos(x) \sin^4(x)$ |
| 3. $C(x) = \cos^4(x)$ | 7. $G(x) = \cos^3(x) \sin(x)$ | |
| 4. $D(x) = \sin^4(x)$ | 8. $H(x) = \cos^3(x) \sin^2(x)$ | |

Correction ▼

[14.0089]

Exercice 12

Soit $u = 1 + i$ et $v = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Déterminer les modules de u et v .
2. Déterminer un argument de u et un argument de v .
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u .
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

Correction ▼

[14.0043]

Exercice 13

Etablir les égalités suivantes :

$$1. \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) (1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right) \right)$$

$$2. (1 - i) \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \right) (\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{13\pi}{60} \right) - i \sin \left(\frac{13\pi}{60} \right) \right)$$

$$3. \frac{\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)}{1 + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

Correction ▼

[14.0042]

Exercice 14

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

1. $z_1 = -1$

4. $z_4 = -1 - i$

7. $z_7 = 7 + 24i$

2. $z_2 = i$

5. $z_5 = 1 + i\sqrt{3}$

8. $z_8 = 3 - 4i$

3. $z_3 = 1 + i$

6. $z_6 = 3 + 4i$

9. $z_9 = 24 - 10i$

Correction ▼

[14.0046]

Exercice 15

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos \left(\frac{\pi}{8} \right)$ et $\sin \left(\frac{\pi}{8} \right)$.

2. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$ et $\sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$.

Correction ▼

[14.0047]

Exercice 16

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$

9. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$

2. $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$

10. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$

3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

11. $z^3 + 3z - 2i = 0$

4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$

12. $z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$

5. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$

13. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

6. $4z^2 - 2z + 1 = 0$

14. $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$

7. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

15. $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$

8. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$

16. $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$

Correction ▼

[14.0048]

Exercice 17

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$.

Indication ▼ Correction ▼

[14.0052]

Exercice 18

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = i$, $b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $c = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

1. Donner une forme trigonométrique des nombres complexes a, b et c .
2. Placer les points A, B et C sur le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
3. On pose : $z = \frac{c-b}{a-b}$.
 - (a) Déterminer $|z|$ et $\arg(z)$.
 - (b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$|z - i| = \left| z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right|$$

Correction ▼

[14.0124]

Exercice 19

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$, $b = \sqrt{2}(-1 + i)$ et $c = \sqrt{2}(-1 - i)$. On définit un quatrième point, noté E , d'affixe e le milieu du segment $[AB]$.

1. Donner une forme trigonométrique des nombres complexes a, b et c .
2. Placer les points A, B et C sur le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
3. Montrer que le triangle OAB est isocèle, puis déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OE})$.
4. Déterminer e puis $|e|$.
5. Déduire : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Correction ▼

[14.0125]

Exercice 20

1. Dans le plan complexe $(0; \vec{u}; \vec{v})$, on considère quatre points A, B, C et D d'affixes respectives $3, 4i, -2 + 3i$ et $1 - i$. Placer les points A, B, C et D dans un plan.
2. On considère les équations dans \mathbb{C}

$$z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i = 0 \quad (E_1) \quad \text{et} \quad z^2 - (1 + 3i)z + 4 + 4i = 0 \quad (E_2)$$

- (a) Montrer que l'équation (E_1) admet une solution réelle z_1 et l'équation (E_2) une solution imaginaire pure z_2 .
- (b) Développer $(z - 3)(z + 2 - 3i)$ puis $(z - 4i)(z - 1 + i)$.
- (c) En déduire les solutions de l'équation $(z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i)(z^2 - (1 + 3i)z + 4 + 4i) = 0$
- (d) On note z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0 .

- (e) Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixe z_0^n soient sur la droite d'équation $y = x$.
3. On note f l'application qui au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i$$

- (a) On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $z' = x' + iy'$ avec $x', y' \in \mathbb{R}$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
- (b) Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

Indications

Indication pour l'exercice 1 ▲

Attention ! Il y a un symbole de conjugaison dans z_4 .

Pour les deux premiers exemples, il suffit de regrouper. Pour les produits, il faut développer puis regrouper.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Pour se "débarrasser" d'un dénominateur écrivez

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Indication pour l'exercice 4 ▲

Il faut bien connaître ses formules trigonométriques. En particulier si l'on connaît $\cos(2\theta)$ ou $\sin(2\theta)$ on sait calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Passez à la forme trigonométrique. Souvenez-vous des formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia} e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia} / e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Indication pour l'exercice 17 ▲

Poser $Z = Z^3$ et résoudre d'abord $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$.

Solutions

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On regroupe simplement les parties réelles et les parties imaginaires. On trouve

$$z_1 = 5 + 6i$$

2. De la même façon,

$$z_2 = (-8 + 12i) + (-15 - 24i) = -23 - 12i$$

3. On développe, puis on regroupe pour trouver :

$$z_3 = 6 + 16i - 3i + 8 = 14 + 13i$$

4. On écrit

$$z_4 = (1 - i)(1 - i) = 1 - 2i - 1 = -2i$$

5. On commence par calculer $(1 - 3i)^2$:

$$(1 - 3i)^2 = 1 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$$

On multiplie ensuite par i :

$$i(1 - 3i)^2 = -8i - 6i^2 = 6 - 8i$$

6. Le plus simple est de tout développer, en utilisant la formule du binôme de Newton ou, pour ceux qui ne la connaissent pas (encore), en écrivant $(1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i)$. On trouve

$$\begin{aligned} z_6 &= (1 + i)^3 \\ &= (1 + i)^2(1 + i) \\ &= (1 + 2i + i^2)(1 + i) \\ &= (1 + 2i - 1)(1 + i) \\ &= 2i(1 + i) \\ &= 2i + 2i^2 \\ &= -2 + 2i \end{aligned}$$

Avec la formule du binôme, on écrit simplement

$$z_6 = (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$$

Correction de l'exercice 2 ▲

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3 + 6i}{3 - 4i} = z_1 = \frac{(3 + 6i)(3 + 4i)}{3^2 + (-4)^2} = \frac{9 + 12i + 18i - 24}{25} = \frac{-15 + 30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i \\ z_2 &= \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 = \left(\frac{(1 + i)(2 + i)}{2^2 + (-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{2 + i + 2i - 1}{2^2 + (-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{1 + 3i}{5}\right)^2 = \frac{1 + 6i - 9}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i \end{aligned}$$

Autre méthode



$$z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(1+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{1+2i-1}{4-4i-1} = \frac{2i}{3-4i} = \frac{2i(3+4i)}{3^2+(-4)^2} = \frac{6i-8}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$$

$$z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{(2+5i)(1+i) + (2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{1^2-i^2}$$

$$= -\frac{6}{2} = -3$$

Autre méthode

$$z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{\overline{2+5i}}{\overline{1-i}} = 2\mathcal{R}e\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)$$

Or

$$\frac{2+5i}{1-i} = \frac{(2+5i)(1+i)}{1^2+(-1)^2} = \frac{2+2i+5i-5}{2} = \frac{-3+7i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$$

Donc

$$z_3 = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

$$z_4 = \frac{5+2i}{1-2i} = \frac{(5+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{5+10i+2i-4}{5} = \frac{-1+12i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{12}{5}i$$

$$z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} \times i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right) - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{1}{8} + i\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = 1$$

Autre méthode

$$z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$$

Ou encore

$$z_5 = j^3 = 1$$

$$z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

On peut toujours s'amuser à développer $(1+i)^9$ et $(1-i)^7$ mais franchement ce n'est pas une bonne idée.

$$z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = (1+i)^2 \frac{(1+i)^7}{(1-i)^7} = (1+i)^2 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 = (1+2i-1) \left(\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}\right)^7$$

$$= 2i \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^7 = \frac{2i(2i)^7}{2^7} = \frac{2^8 i^8}{2^7} = 2i^8 = 2$$

Autre méthode

$$z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^7} = \frac{(\sqrt{2})^9 \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9}{(\sqrt{2})^7 \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^7} = \frac{(\sqrt{2})^2 e^{i\frac{9\pi}{4}}}{e^{-i\frac{7\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{9\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right)} = 2e^{\frac{16i\pi}{4}} = 2e^{4i\pi}$$

$$= 2$$

$$z_7 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2} = -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Autre méthode

$$z_7 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{j} = \frac{j^2}{j^3} = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_8 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)} = \frac{1}{3-i+6i+2} = \frac{1}{5+5i} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+i} = \frac{1}{5} \times \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i$$
$$z_9 = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{(1+2i)^2}{5} = \frac{1+4i-4}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$ est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z + \bar{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$ et donc $z + \bar{z} = -3$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$.

2. $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\cos \frac{\pi}{8} - 3i\sin \frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Il nous reste à expliquer comment nous avons calculé $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$: posons $\theta = \frac{\pi}{8}$, alors $2\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2\theta)$. Mais $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Donc $\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$. Et ensuite $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$. Comme $0 \leq \theta = \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des nombres positifs. Donc

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad , \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $9 - 7i$

2. $-6i$

3. $-0,3 + 1,1i$

$$4. -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

$$\begin{aligned} |a| &= |3i(2+i)(4+2i)(1+i)| = |3i| \times |2+i| \times |4+2i| \times |1+i| \\ &= 3 \times \sqrt{2^2+1^2} \times 2 \times |2+i| \times \sqrt{1^2+1^2} = 6 \left(\sqrt{2^2+1^2} \right)^2 \times \sqrt{2} = 6 \times 5\sqrt{2} \\ &= 30\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(a) &= \arg(3i(2+i)(4+2i)(1+i)) = \arg(3i) + \arg(2+i) + \arg(4+2i) + \arg(1+i) + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + \arg(2+i) + \arg(2(2+i)) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{3\pi}{4} + \arg(2+i) + \arg 2 + \arg(2+i) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\arg(2+i) + 2k\pi \end{aligned}$$

Soit θ un argument de $2+i$, $\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $\cos(\theta) = \cos(\theta_0)$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta_0)$, on en déduit que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$

Par suite

$$\begin{aligned} \arg(a) &= \frac{3\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi \\ |b| &= \left| \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i} \right| = \frac{|4+2i| \times |-1+i|}{|2-i| \times |3i|} = \frac{2 \times |2+i| \times \sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2} \times 3} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times 3} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(b) &= \arg(4+2i) + \arg(-1+i) - \arg(2-i) - \arg(3i) + 2k\pi = \theta_0 + \frac{3\pi}{4} - (-\theta_0) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

$$z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{8} \right)$$

$$z_3 = 3e^{-\frac{7i\pi}{8}} = 3 \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{8} \right) \right) = 3 \cos \left(\frac{7\pi}{8} \right) - 3i \sin \left(\frac{7\pi}{8} \right)$$

$$= 3 \cos \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right) - 3i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right) = -3 \cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) - 3i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right)$$

$$= -3 \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + 3i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right)$$

$$z_4 = \left(2e^{\frac{i\pi}{4}} \right) \left(e^{-\frac{3i\pi}{4}} \right) = 2e^{i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i$$

$$z_5 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}} = 2e^{i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right)} = 2e^{i\pi} = -2$$

$$z_6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \left(3e^{\frac{5i\pi}{6}} \right) = 6e^{i \left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \right)} = 6e^{\frac{7i\pi}{6}} = 6 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right) = 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$z_7 = \frac{2\sqrt{3} - 3i}{3e^{\frac{i\pi}{3}}} = \frac{2}{3}e^{i \left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \right)} = \frac{2}{3}e^{\frac{8i\pi}{6}} = \frac{2}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}} = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{3} - i \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$z_8 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_9 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) - 3i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right)$$

A moins de connaître $\cos \left(\frac{\pi}{8} \right)$ et $\sin \left(\frac{\pi}{8} \right)$ on ne peut pas faire mieux.

Correction de l'exercice 9 ▲

$$z_1 = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

$$z_3 = (1+i\sqrt{3})^4 = \left(2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^4 = 2^4 \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^4 = 16e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$z_4 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = \left(2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^5 + \left(2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^5 = 2^5 \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^5 + 2^5 \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^5$$

$$= 32 \left(e^{\frac{5i\pi}{3}} + e^{-\frac{5i\pi}{3}} \right) = 32 \times 2 \cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) = 64 \left(-\frac{1}{2} \right) = -32$$

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Autre méthode

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(2+2i)}{2^2+(-2)^2} = \frac{2\sqrt{6}+2i\sqrt{6}-2i\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{8} = \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

Remarque : il aurait mieux valu mettre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en facteur d'entrée.
Là on est mal parti, il va falloir trouver le module, puis le mettre en facteur,

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1))$$

$$|z_6| = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 2\sqrt{2} = 1$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Mais on ne connaît pas d'angle vérifiant cela. Il faut faire autrement

$$|\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i} = \frac{2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)}{2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. $(3 + 2i)(1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 3 - 7i + 6 = 9 - 7i$

2.

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -6i$$

3.

$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} e^{\frac{5i\pi}{6}} = \frac{2}{3} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3} e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

$$A(X) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8}$$

$$= \frac{e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{2\cos(3x) + 3 \times 2\cos(x)}{8}$$

$$= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$$

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
 &= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i} = \frac{2i \sin(3x) - 3 \times 2i \sin(x)}{-8i} \\
 &= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(X) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\
 &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2 \cos(4x) + 4 \times 2 \cos(2x) + 6}{16} \\
 &= \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2 \cos(4x) - 4 \times 2 \cos(2x) + 6}{16}
 \end{aligned}$$

$$D(X) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16}$$

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \cos^2(x) \sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\
 &= \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{4} \times \frac{e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{8ix} = \frac{(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})}{-16} \\
 &= \frac{e^{2ix}e^{2ix} - 2e^{2ix} + e^{2ix}e^{-2ix} + 2e^{2ix} - 4 + 2e^{-2ix} + e^{-2ix}e^{2ix} - 2e^{-2ix} + e^{-2ix}e^{-2ix}}{-16} \\
 &= \frac{e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1 + 2e^{2ix} - 4 + 2e^{-2ix} + 1 - 2e^{-2ix} + e^{-4ix}}{-16} = \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 2}{-16} \\
 &= \frac{2 \cos(4x) - 2}{-16} = -\frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Autre méthode en utilisant les formules trigonométriques

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \cos^2(x) \sin^2(x) = (\cos(x) \sin(x))^2 = \left(\frac{1}{2} \sin(2x) \right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos(4x)}{2} \\
 &= -\frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

En utilisant les formules

$$\begin{aligned}
 \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a), a = x \\
 \cos(2a) &= 1 - \sin^2(a) \Leftrightarrow \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, a = 2x \\
 F(x) &= \cos(x) \sin^3(x) = \cos(x) B(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
 &= \frac{e^{4ix} - 3e^{2ix} + 3 - e^{-2ix} + e^{2ix} - 3 + 3e^{-2ix} - e^{-4ix}}{-16i} \\
 &= \frac{e^{4ix} - e^{-4ix} - 2(e^{2ix} - e^{-2ix})}{-16i} = \frac{2i \sin(4x) - 2 \times 2i \sin(2x)}{-16i} \\
 &= -\frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \cos^3(x) \sin(x) = A(x) \sin(x) = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} \times \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
 &= \frac{e^{4ix} - e^{2ix} + 3e^{2ix} - 3 + 3 - 3e^{-2ix} + e^{-2ix} - e^{-4ix}}{16i} \\
 &= \frac{e^{4ix} - e^{-4ix} + 2(e^{2ix} - e^{-2ix})}{16i} = \frac{2i \sin(4x) + 2 \times 2i \sin(2x)}{16i} \\
 &= \frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x)
 \end{aligned}$$

On peut toujours faire « comme d'habitude » améliorons un peu les choses

$$\begin{aligned}
 H(x) &= \cos^3(x) \sin^2(x) = \cos(x) (\cos(x) \sin(x))^2 = \cos(x) \left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right)^2 = \frac{1}{4} \cos(x) \sin^2(2x) \\
 &= \frac{1}{4} \cos(x) \left(\frac{1 - \cos(4x)}{2}\right) = \frac{1}{8} \cos(x) (1 - \cos(4x)) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \cos(x) \cos(4x)
 \end{aligned}$$

Alors on utilise des formules souvent inconnues des étudiants (et c'est fort dommage) ou on fait comme d'habitude

$$\begin{aligned}
 H(x) &= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \cos(x) \cos(4x) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-3ix} + e^{3ix} + e^{-5ix}) \\
 &= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{-3ix} + e^{3ix}) \\
 &= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (2 \cos(5x) + 2 \cos(3x)) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{16} \cos(5x) - \frac{1}{16} \cos(3x) \\
 I(x) &= \cos^2(x) \sin^3(x)
 \end{aligned}$$

Allez, encore une autre technique!

On pose $t = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = t - \frac{\pi}{2}$ ainsi $\cos(x) = \cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin(t)$ et $\sin(x) = \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(t)$ Donc

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \sin^2(t) \cos^3(t) = \frac{1}{8} \cos(t) - \frac{1}{16} \cos(5t) - \frac{1}{16} \cos(3t) \\
 &= \frac{1}{8} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \cos\left(5x - \frac{5\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \sin(5x) + \frac{1}{16} \sin(3x) \\
 J(x) &= \cos(x) \sin^4(x) = \cos(x) D(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6}{16} \\
 &= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{-ix} + 6e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} - 4e^{ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{-ix}) \\
 &= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} - 3(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 2(e^{ix} + e^{-ix})) \\
 &= \frac{1}{32} (2 \cos(5x) - 3 \times \cos(3x) + 2 \times 2 \cos(x)) \\
 &= \frac{1}{16} \cos(5x) - \frac{3}{32} \cos(3x) + \frac{1}{8} \cos(x)
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

cf également correction manuscrite.

$$1. |u| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ et } |v| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

2.

$$u = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$.

$$v = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Donc un argument de v est $\frac{2\pi}{3}$.

3. On cherche les solutions complexes de $z^3 = u$

$$\begin{aligned} z^3 = u &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \sqrt{2} \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 3 \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{6}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \end{cases} \end{aligned}$$

u admet trois racines cubiques

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}; \quad z_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3})} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{9\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3})} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

4.

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

Et

$$\frac{u}{v} = \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{4}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1.

$$\begin{aligned} \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right) \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right) (1+i) &= e^{i\frac{\pi}{7}} e^{-i\frac{\pi}{3}} \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{7}} e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i(\frac{12\pi}{84} - \frac{28\pi}{84} + \frac{21\pi}{84})} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{84}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right) \right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 (1-i) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) (\sqrt{3}-i) &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\
 &= 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{5}} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\left(-\frac{15\pi}{60} + \frac{12\pi}{60} - \frac{10\pi}{60}\right)} = 2\sqrt{2} e^{-\frac{13i\pi}{60}} \\
 &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i \sin\left(\frac{13\pi}{60}\right) \right) \\
 \frac{\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)}{1+i} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{-\frac{2i\pi}{12}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = -1$

$$Z_1 = -i \text{ et } Z_2 = i$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_1 = -2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ et } Z_2 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connaît pas les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Autre méthode, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2 = 1+i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 1 \\ L_2 & 2ab = 1 \end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$\left| (a+ib)^2 \right| = |1+i| \Leftrightarrow |a+ib|^2 = \sqrt{1^2+1^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2} \right)^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow b^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b = \pm \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc les deux solutions de $z^2 = 1+i$ sont

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2} \text{ et } Z_2 = -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = -1-i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$$Z_1 = -2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{5\pi}{8}} \text{ et } Z_2 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connaît pas les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$. Autre méthode, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a + ib)^2 = -1 - i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = -1 \\ L_2 & 2ab = -1 \end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a + ib)^2| = |-1 - i| \Leftrightarrow |a + ib|^2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2 = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{-2 + 2\sqrt{2}}{4}} \pm \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}} \pm \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de signes opposés donc les deux solutions de $z^2 = -1 - i$ sont

$$Z_1 = \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} \text{ et } Z_2 = -\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } Z_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2 = 3 + 4i$

On pose $Z = a + ib, Z^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow L_1 \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ L_2 \\ 2ab = 4 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|Z^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25} = 5L_3$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3 , on trouve $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4$,

d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1 , d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe. Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $Z_1 = 2 + i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $Z_2 = -2 - i$

Deuxième méthode

$3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2 - 3A - 4 = 0$ sont $A_1 = -1 < 0$ et $A_2 = 4$, donc $a^2 = 4$,

Si $a = -2$ alors $b = \frac{2}{a} = -1$ et alors $Z_2 = -2 - i$, si $a = 2$ alors $b = \frac{2}{a} = 1$ et alors $Z_1 = 2 + i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2 = -7 - 24i$

On pose $Z = a + ib, Z^2 \Leftrightarrow -7 - 24i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow -7 - 24i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow L_1 \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ L_2 \\ 2ab = -24 \end{cases}$

$L_2 \begin{cases} 2ab = -24 \end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow |-7 - 24i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3 , on trouve $2a^2 = 18 \Leftrightarrow a^2 = 9$, d'où l'on tire $b^2 = 16$. Les valeurs possibles de a sont ± 3 et les valeurs possibles de b sont ± 4 , d'après l'équation $2ab = -24 \Leftrightarrow ab = -12$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé. Si $a = 3$ alors $b = -4$ et $Z_1 = 3 - 4i$ et si $a = -3$ alors $b = 4$ et $Z_2 = -3 + 4i$

Deuxième méthode

$-7 - 24i = 9 - 24i - 16 = (3 - 4i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-12}{a}\right)^2 = -7 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{144}{a^2} = -7 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 144 = -7a^2 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 7a^2 - 144 = 0 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 7A - 144 = 0 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2 + 7A - 144 = 0$ sont $A_1 = -16 < 0$ et $A_2 = 9$, donc $a^2 = 9$,

Si $a = 3$ alors $b = -\frac{12}{a} = -4$ et alors $Z_2 = 3 - 4i$, si $a = -3$ alors $b = -\frac{12}{a} = 4$ et alors $Z_1 = -3 + 4i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2 = 3 - 4i = z_8$, on peut refaire comme précédemment mais on va prendre la méthode la plus simple

$$Z^2 = 3 - 4i = 4 - 4i - 1 = (2 - i)^2$$

Il y a deux solutions

$$Z_1 = 2 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = -2 + i$$

On cherche les complexes Z tels que $Z^2 = z_9 = 24 - 10i$

Là encore, on va aller au plus simple

$$24 - 10i = 25 - 10i - 1 = (5 - i)^2$$

Donc il y a deux solutions

$$Z_1 = 5 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = -5 + i$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose $Z = a + ib$,

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ L_2 & 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3 , on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'après l'équation $2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{2}}{4}$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Et si $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Admet deux solutions $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $Z_4 = -e^{i\frac{\pi}{8}} = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

2. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On pose $Z = a + ib$,

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow L_1 \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ L_2 \\ 2ab = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3 , on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, d'après l'équation $2ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{3}}{4}$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Et si $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Admet deux solutions $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $Z_4 = -e^{i\frac{\pi}{12}} = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2$$

$$z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$$

2. $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(5i + 14))^2 - 4 \times 2(5i + 12) \\ &= (-25 + 140i + 196) - 40i - 96 = 75 + 100i \\ &= 25(3 + 4i) \\ &= 5^2(3 + 4i) \end{aligned}$$

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a + ib)^2 = 5 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 3 \\ L_2 & 2ab = 4 \\ L_3 & a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases}$$

En faisant $L_1 + L_3$ on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$

En faisant $L_3 - L_2$ on trouve que $2b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc $a + ib = 2 + i$ ou $a + ib = -2 - i$

Autre méthode $3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$

et alors

$$\Delta = 5^2(2 + i)^2 = (10 + 5i)^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{5i + 14 - (10 + 5i)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ z_2 &= \frac{5i + 14 + (10 + 5i)}{2} = \frac{24 + 10i}{2} = 12 + 5i \end{aligned}$$

3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

$$\Delta = 3 + 4i = (2 + i)^2$$
$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i = 1 - i \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - ij$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i = -1 + i \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + ij^2$$

4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$
$$z_1 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i$$
$$z_2 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i$$

5. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-(3 + 4i))^2 - 4(-1 + 5i) = 9 + 24i - 16 + 4 - 20i = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1 = \frac{3 + 4i - (1 - 2i)}{2} = 2 + 3i$$
$$z_2 = \frac{3 + 4i + 1 - 2i}{2} = 2 + i$$

6. $4z^2 - 2z + 1 = 0$

Soit on résout «normalement», soit on ruse, rusons

$$4z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$$

Avec $Z = -2z$. Les solutions de $Z^2 + Z + 1 = 0$ sont connues (et puis on vient de les revoir dans 1°))

$$Z_1 = j \quad \text{et} \quad Z_2 = j^2$$

Par conséquent

$$z_1 = -\frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2}j^2$$

7. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

On pose $Z = z^2$, $Z^2 + 10Z + 169 = 0$ a pour discriminant

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2 \times 13)^2 = (10 - 26)(10 + 26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2$$
$$Z_1 = \frac{-10 + 24i}{2} = -5 + 12i$$
$$Z_2 = \frac{-10 - 24i}{2} = -5 - 12i$$

On cherche $z = a + ib$ tel que

$$z^2 = Z_1 \Leftrightarrow (a + ib)^2 = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = -5 \quad \text{et} \quad 2ab = 12 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3 , on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$,

En faisant la différence de L_3 et de L_1 , on trouve que $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$,

D'après L_2 , a et b sont de même signe donc $z^2 = Z_1$ a deux solutions

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 - 3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2 = z^2$ ou dire que $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\bar{z}_1 = 2 - 3i$ et $\bar{z}_2 = -2 + 3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

8. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$

On peut faire comme dans le 7°), mais rusons :

$$\begin{aligned} z^4 + 2z^2 + 4 = 0 &\Leftrightarrow \frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z^2}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - j\right] \left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - j^2\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - j^4\right] \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - j^2\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - j^2\right) \left(\frac{z}{\sqrt{2}} + j^2\right) \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - j\right) \left(\frac{z}{\sqrt{2}} + j\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - \sqrt{2}j^2) (z + \sqrt{2}j^2) (z - \sqrt{2}j) (z + \sqrt{2}j) = 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont

$$\{\sqrt{2}j^2, -\sqrt{2}j^2, \sqrt{2}j, -\sqrt{2}j\}$$

9. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$

On pose $X = x^2$

$$X^2 - 30X + 289 = 0$$

$$\Delta = 30^2 - 4 \times 289 = 900 - 1156 = -256 = -16^2 = (16i)^2$$

$$X_1 = \frac{30 - 16i}{2} = 15 - 8i$$

$$X_2 = 15 + 8i$$

On cherche x tel que $x^2 = 15 - 8i = 16 - 8i - 1 = (4 - i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_1 = 4 - i$ et $x_2 = -(4 - i) = -4 + i$.

De même on cherche x tel que $x^2 = 15 + 8i = 16 + 8i - 1 = (4 + i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_3 = 4 + i$ et $x_4 = -(4 + i) = -4 - i$.

Les solutions sont

$$\{4 - i, -4 + i, 4 + i, -4 - i\}$$

10. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$

Il faudrait trouver des solutions (réelles ou complexes).

$x = 1$ est solution évidente, mais ensuite cela ne vient pas, mais en regardant mieux on s'aperçoit que 4 premiers termes ressemblent fort au développement de $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ donc

$$\begin{aligned}
 x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^4 - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^4 = 16 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |(x+1)^4| = 16 \\ \arg((x+1)^4) = \arg(16) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|^4 = 2^4 \\ 4\arg(x+1) = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = 2 \\ \arg(x+1) = \frac{2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases} \Leftrightarrow x_k + 1 = 2e^{\frac{ik\pi}{2}}, \\
 k \in \{0, 1, 2, 3\} &\Leftrightarrow x_k = -1 + 2e^{\frac{ik\pi}{2}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \\
 x_0 = -1 + 2 = 1; x_1 = -1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}} = -1 + 2i; \\
 x_2 = -1 + 2e^{i\pi} = -1 - 2 = -3; x_3 = -1 + 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -1 - 2i
 \end{aligned}$$

Sont les solutions.

11. $z^3 + 3z - 2i = 0$

On voit que i est une solution évidente (car $i^3 + 3i - 2i = 0$) donc on peut mettre $z - i$ en facteur.

$$\begin{aligned}
 z^3 + 3z - 2i &= (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 + 3z - 2i = az^3 + (-ia + b)z^2 + (-ib + c)z - ic \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -ia + b = 0 \\ -ib + c = 3 \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = ia = i \\ c = 3 + ib = 2 \\ c = 2 \end{cases} \\
 z^3 + 3z - 2i &= (z - i)(z^2 + iz + 2)
 \end{aligned}$$

Le discriminant de $z^2 + iz + 2$ est $\Delta = i^2 - 4 \times 2 = -9 = (3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z = \frac{-i - 3i}{2} = -2i \quad \text{et} \quad z = \frac{-i + 3i}{2} = i$$

Il y a donc deux solutions, $z_1 = i$ et $z_2 = -2i$.

12.

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (1+a)^2(1+i)^2 - 4(1+a^2)i = (1+2a+a^2)(1+2i-1) - 4i - 4ia^2 \\
 &= 2i + 4ia + 2ia^2 - 4i - 4ia^2 = -2i + 4ia - 2ia^2 = -2i(1-2a+a^2) \\
 &= (1-i)^2(1-a)^2 = ((1-i)(1-a))^2 \\
 z_1 &= \frac{(1+a)(1+i) - (1-i)(1-a)}{2} = \frac{1+i+a+ia - (1-a-i+ia)}{2} = a+i \\
 z_1 &= \frac{(1+a)(1+i) + (1-i)(1-a)}{2} = \frac{1+i+a+ia + 1-a-i+ia}{2} = 1+ia
 \end{aligned}$$

13. $\Delta = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = 1 - 25 - 10i + 24 + 8i = -2i$

Il faut trouver δ tel que $\Delta = \delta^2$

Première méthode :

$-2i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2$ c'est une identité remarquable. Donc $\delta_1 = 1-i$ ou $\delta_2 = -1+i$ Deuxième méthode

On pose $\delta = a + ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -2i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow -2i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-2i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2 = a^2 + b^2$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$,

d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 1 , d'après l'équation $2ab = -2 \Leftrightarrow ab = -1$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé. Si $a = 1$ alors $b = -1$ et $\delta = 1 - i$ et si $a = -1$ alors $b = 1$ et $\delta = -1 + i$. Ce sont bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.

Troisième méthode

$$\Delta = -2i = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}, \text{ donc les racines deuxièmes de } \Delta \text{ sont } \delta = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i \text{ et } \delta = -\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = 1 - i.$$

Pour résoudre $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$, on n'a besoin que d'une racine deuxième, on prend, par exemple $\delta = 1 - i$.

Les deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1 - 5i) - (1 - i)}{2i} = \frac{-2 + 6i}{2i} = \frac{-1 + 3i}{i} = \frac{(-1 + 3i)(-i)}{i(-i)} = 3 + i$$

$$z_2 = \frac{-(1 - 5i) + (1 - i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

14.

$$\Delta = (-(3 + i))^2 - 4(1 + i)(-6 + 4i) = (3 + i)^2 - 4(-6 + 4i - 6i - 4) = 9 - 1 + 6i - 4(-10 - 2i) = 8 + 6i + 40 + 8i = 48 + 14i$$

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 48 + 14i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 48 + 14i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |48 + 14i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2|24 + 7i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{24^2 + 7^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{576 + 49} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{625} = 2 \times 25 = 50$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 98 \Leftrightarrow a^2 = 49$,

d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 7 et les valeurs possibles de b sont ± 1 , d'après l'équation $2ab = 14 \Leftrightarrow ab = 7$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 7$ alors $b = 1$ et $\delta = 7 + i$ et si $a = -7$ alors $b = -1$ et $\delta = -7 - i$

Deuxième méthode

$$\Delta = 48 + 14i = 49 + 2 \times 7i - 1 = (7 + i)^2 \text{ donc } \delta = 7 + i \text{ ou } \delta = -7 - i.$$

Troisième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{7}{a}\right)^2 = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{49}{a^2} = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 49 = 48a^2 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^4 - 48a^2 - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 48A - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 - 48A - 49 = 0$ est $\Delta' = 48^2 + 4 \times 49 = 2500 = 50^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{48-50}{2} = -1$ et $A_2 = \frac{48+50}{2} = 49$, $A_1 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -1$, par contre $a^2 = 49$ admet deux solutions $a = -7$ et $a = 7$. Si $a = -7$ alors $b = \frac{7}{a} = -1$ et si $a = 7$ alors $b = \frac{7}{a} = 1$, on retrouve les mêmes solutions.

Les solutions de $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(3 + i) - (7 + i)}{2(1 + i)} = \frac{4}{2(1 + i)} = \frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{1^2 + 1^2} = -1 + i$$

$$z_2 = \frac{(3 + i) + (7 + i)}{2(1 + i)} = \frac{10 + 2i}{2(1 + i)} = \frac{5 + i}{1 + i} = \frac{(5 + i)(1 - i)}{1^2 + 1^2} = \frac{5 - 5i + i + 1}{1^2 + 1^2} = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$$

15.

$$\Delta = (-(9 + 3i))^2 - 4(1 + 2i)(-5i + 10) = (3(3 + i))^2 - 4(-5i + 10 + 10 + 20i) = 9(9 - 1 + 6i) - 4(-25) = 9(8 + 6i) - 4(20 + 15i) = 72 + 54i - 80 - 60i = -8 - 6i$$



On pose $\delta = a + ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-8 - 6i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{64 + 36} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$,

d'où l'on tire $b^2 = 9$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 3 , d'après l'équation $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -3$ et $\delta = 1 - 3i$ et si $a = -1$ alors $b = 3$ et $\delta = -1 + 3i$

Deuxième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - (\frac{-3}{a})^2 = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 9 = -8a^2 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 8a^2 - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 8A - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 + 8A - 9 = 0$ est

$\Delta' = 8^2 + 4 \times 9 = 100 = 10^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{-8-10}{2} = -9$ et $A_2 = \frac{-8+10}{2} = 1, A_2 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -9$, par contre $a^2 = 1$ admet deux solutions $a = -1$ et $a = 1$.

Si $a = -1$ alors $b = \frac{-3}{a} = 3$ et si $a = 1$ alors $b = \frac{-3}{a} = -1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta = -8 - 6i = 1 - 6i - 9 = (1 - 3i)^2$ donc $\delta = 1 - 3i$ et $\delta = -1 + 3i$

Les solutions de $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(9 + 3i) - (1 - 3i)}{2(1 + 2i)} = \frac{8 + 6i}{2(1 + 2i)} = \frac{4 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 + 3i)(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{4 - 8i + 3i + 6}{10} = 2 - i$$

$$z_2 = \frac{(9 + 3i) + (1 - 3i)}{2(1 + 2i)} = \frac{10}{2(1 + 2i)} = \frac{5}{1 + 2i} = \frac{5(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = 1 - 2i$$

16. $\Delta = (-6i + 2)^2 - 4(1 + 3i)(11i - 23) = (6i + 2)^2 - 4(11i - 23 - 33 - 69i) = -36 + 24i + 4 - 4(-56 - 58i) = -32 + 24i + 224 + 232i = 192 + 256i = 64(3 + 4i)$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de $3 + 4i$, ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de $192 + 256i$.

On pose $\delta = a + ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25} = 5$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4$, d'où

l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1 , d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $\delta = 2 + i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $\delta = -2 - i$

Donc $(2 + i)^2 = 3 + 4i$ entraîne que $\Delta = 64(3 + 4i) = 8^2(2 + i)^2 = (8(2 + i))^2 = (16 + 8i)^2$

Deuxième méthode

$3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - (\frac{2}{a})^2 = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2 - 3A - 4 = 0$ sont $A_1 = -1 < 0$ et $A_2 = 4$, donc $a^2 = 4$,

Si $a = -2$ alors $b = \frac{2}{a} = -1$ et alors $\delta = -2 - i$, si $a = 2$ alors $b = \frac{2}{a} = 1$ et alors $\delta = 2 + i$.

Les solutions de $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$ sont

$$z_1 = \frac{6i + 2 - (16 + 8i)}{2(1 + 3i)} = \frac{-14 - 2i}{2(1 + 3i)} = \frac{-7 - i}{1 + 3i} = \frac{(-7 - i)(1 - 3i)}{1^2 + 3^2} = \frac{-7 + 21i - i - 3}{10} = -1 + 2i$$

$$z_2 = \frac{6i + 2 + (16 + 8i)}{2(1 + 3i)} = \frac{18 + 14i}{2(1 + 3i)} = \frac{9 + 7i}{1 + 3i} = \frac{(9 + 7i)(1 - 3i)}{1^2 + 3^2} = \frac{9 - 27i + 7i + 21}{10} = 3 - 2i$$

Correction de l'exercice 17 ▲

$$\Delta = (-i)^2 + 4(1 + i) = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$$

Les solutions de $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$ sont

$$Z_1 = \frac{i + 2 + i}{2} = 1 + i$$

$$Z_2 = \frac{i - (2 + i)}{2} = -1$$

Les solutions de $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$ vérifient

$$z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \sqrt{2} \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 3 \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{6}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases} \Leftrightarrow z \in \left\{ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}} \right\}$$

Ou

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = 1 \\ \arg(z^3) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3 \arg(z) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1; \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Finalement il y a six solutions

$$\left\{ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}; e^{i\frac{\pi}{3}}; -1; e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soient les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = i, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

1. La forme trigonométrique d'un nombre complexe z est donnée par

$$r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$.

• Pour $a = i$: $|a| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Le point A est sur l'axe des ordonnées positives, donc :

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

- Pour $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$: $|b| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$. On cherche θ_b tel que $\cos \theta_b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta_b = \frac{1}{2}$.

$$b = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

- Pour $c = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$: On remarque que $c = \bar{b}$. Le module est identique ($|c| = 1$) et l'argument est l'opposé.

$$c = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

2. Les points A , B et C ont tous un module égal à 1, ils appartiennent donc au cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.

3. Calculons d'abord les affixes des vecteurs \vec{BC} et \vec{BA} :

- $c - b = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -i$

- $a - b = i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Calcul du module :

$$|z| = \frac{|c - b|}{|a - b|} = \frac{|-i|}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Calcul de l'argument :

$$\arg(z) = \arg(c - b) - \arg(a - b) [2\pi]$$

donc

$$\arg(c - b) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arg(a - b) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{6}$$

d'où

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

L'équation est :

$$|z - i| = \left|z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right|$$

On remarque que l'on peut écrire l'égalité comme :

$$|z - a| = |z - b|$$

Ce qui est équivalent à la relation de distance :

$$AM = BM$$

L'ensemble des points M est donc la **médiatrice du segment** $[AB]$.

Correction de l'exercice 19 ▲

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On donne : $a = 2$, $b = \sqrt{2}(-1 + i) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $c = \sqrt{2}(-1 - i) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

1. • **Pour** $a = 2$: Le module est $|a| = 2$. Comme a est un réel positif, son argument est $0 \pmod{2\pi}$.

$$a = 2(\cos 0 + i \sin 0)$$

- **Pour** $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$: Calcul du module : $|b| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$. On cherche θ tel que :
- $$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies \theta = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

$$b = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

- **Pour** $c = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$: On remarque que $c = \bar{b}$. Le module est le même ($|c| = 2$) et l'argument est l'opposé.

$$c = 2 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

2. Les points A , B et C sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2. A est sur l'axe des réels, B est sur la deuxième bissectrice et C est le symétrique de B par rapport à l'axe des réels.
3. **Nature du triangle** OAB : On a $|a| = OA = 2$ et $|b| = OB = 2$. Comme $OA = OB$, le triangle OAB est **isocèle en** O .

Angle orienté (\vec{u}, \vec{OE}) : E est le milieu de $[AB]$. Dans un triangle isocèle en O , la médiane issue du sommet principal est aussi la bissectrice de l'angle au sommet. L'angle $(\vec{u}, \vec{OA}) = 0$ et $(\vec{u}, \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$. L'angle (\vec{u}, \vec{OE}) est la moyenne des deux arguments :

$$(\vec{u}, \vec{OE}) = \frac{0 + \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8} \pmod{2\pi}$$

4. **Calcul de** e : $e = \frac{a+b}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Calcul de $|e|$: Dans le triangle OAE rectangle en E (car la médiane est aussi hauteur), on a : $|e| = OE = OA \times \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. Cependant, il est plus simple d'utiliser la forme algébrique : $|e|^2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{8-4\sqrt{2}}{4} = 2 - \sqrt{2}$. D'où $|e| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

5. On sait que $e = |e|(\cos \theta_e + i \sin \theta_e)$ avec $\theta_e = \frac{3\pi}{8}$. Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\operatorname{Re}(e)}{|e|} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\operatorname{Im}(e)}{|e|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2+ \sqrt{2}}}{2}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

On cherche un réel x solution de (E_1) :

$$\begin{aligned} x^2 - (1+3i)x - 6 + 9i &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6) + i(-3x + 9) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ -3x + 9 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ou } x = 3 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Donc 3 est la solution réelle de (E_1) . On cherche une solution de (E_2) de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (iy)^2 - (1+3i) \times iy + 4 + 4i &= 0 \Leftrightarrow -y^2 - iy + 3y + 4 + 4i = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 3y + 4 = 0 \\ -y + 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \text{ ou } y = -1 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $4i$ est la solution imaginaire pure de (E_2).

Pour $z \in \mathbb{C}$:

$$(z-3)(z+2-3i) = z^2 + 2z - 3iz - 3z - 6 + 9i = z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i$$

$$(z-4i)(z-1+i) = z^2 - z + iz - 4iz + 4i - 4i^2 = z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i$$

$$(z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i)(z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i) = 0$$

$$\Rightarrow z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0 \text{ ou } z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0$$

$$\Rightarrow (z-3)(z+2-3i) = 0 \text{ ou } (z-4i)(z-1+i) = 0$$

$$\Rightarrow z = 3 \text{ ou } z = -2 + 3i \text{ ou } z = 4i \text{ ou } z = 1 - i$$

Donc $S = \{3; -2 + 3i; 4i; 1 - i\}$

On a donc $z_0 = 1 - i$.

$$|z_0| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$z_0 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right)$ donc $\arg(z) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ à l'aide d'un cercle trigonométrique. Finalement

$$z_0 = \sqrt{2} e^{-\frac{1}{4}\pi}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$M_n \in D_{y=x} \Leftrightarrow \arg(z_0^n) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow n \times \arg(z_0) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow n \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow n = -1 - 4k$$

Or on veut que $n \geq 0$ donc $-1 - 4k \geq 0 \Rightarrow 4k \leq -1 \Leftrightarrow k \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow k \leq 0$ car k est un entier. Donc les solutions sont $\{4k - 1; k \in \mathbb{N}\}$

$$z' = z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i \Rightarrow x' + iy' = (x + iy)^2 - (1+3i)(x + iy) - 6 + 9i$$

$$\Rightarrow x' + iy' = x^2 + 2ixy - y^2 - x - iy - 3ix + 3y - 6 + 9i \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x^2 - y^2 - x + 3y - 6 \\ y' = 2xy - y - 3x + 9 \end{cases}$$

par identification des parties réelles et imaginaires.

$$f(M) \in (0; \vec{v}) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - x + 3y - 6 = 0$$