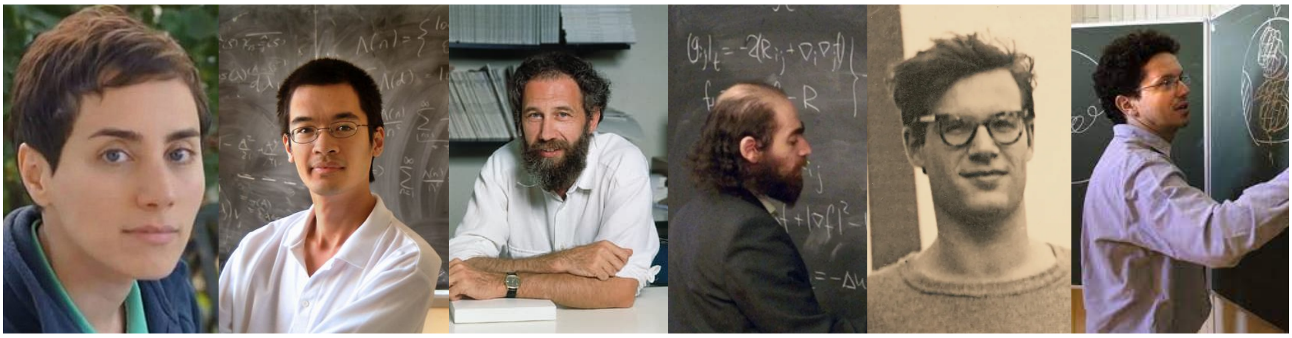
Nombres Complexes

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : `a.gere@istom.fr`.

Résumé

Les nombres complexes forment une extension de l'ensemble des nombres réels. Ils permettent notamment de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels. Les nombres complexes furent introduits au XVIe siècle par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli, Nicolo Fontana, dit Tartaglia, et Ludovico Ferrari afin d'exprimer les solutions des équations du troisième degré en toute généralité par les formules de Cardan, en utilisant notamment des nombres de carré négatif, ainsi que les solutions des équations du quatrième degré (méthode de Ferrari).

Nous présenterons dans ce cours les outils fondamentaux pour travailler avec les nombres complexes, les différentes écritures, la représentation graphique, et un lien avec la trigonométrie.

Table des matières

[1] version du 27 septembre 2024

1 Ensemble des nombres complexes

1.1 Forme algébrique

L'équation

$$x^2 = -1$$

n'a pas de solution réelle. On introduit alors de nouveaux nombres appelés nombres complexes de façon que cette équation admette deux solutions, notées i et$-i$.

Définition 1 (Ensemble $\mathbb{C}$)**.**
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ tel que

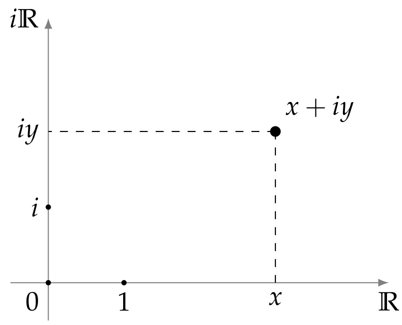
$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \text{ , avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce nouvel ensemble peut donc nous être utile pour décrire des éléments géométrique à deux dimensions. En particulier tout point du plan, ou encore tout vecteur de $\mathbb{R}^2$, a un nombre complexe qui lui est associé.

Définition 2 (Forme Algébrique)**.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors

$$z = x + iy$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. C'est la **forme algébrique** du nombre complexe z.



On identifiera 1 avec le vecteur $(1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$, et i avec le vecteur $(0, 1)$.

Remarque.

- Le réel x est appelée **partie réelle** de z et est notée $Re(z)$.
- Le réel y est appelée **partie imaginaire** de z et est notée $Im(z)$
- Si $Im(z) = 0$, c'est à dire si $y = 0$, alors $z = x$ est situé sur l'axe des abscisses, que l'on identifie à $\mathbb{R}$. Dans ce cas on dira que z est **réel**.

- Si $Re(z) = 0$, c'est à dire si $x = 0$, alors $z = iy$ est situé sur l'axe des ordonnées, que l'on identifie à $i\mathbb{R}$. Dans ce cas on dira que z est **imaginaire pur**.
- Si $y \neq 0$, z est dit **imaginaire**.

Exemple 1.
Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivant :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 \quad ; \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

On a pour z_1,

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} = z_1 = \frac{(3+6i)(3+4i)}{3^2+(-4)^2} = \frac{9+12i+18i-24}{25} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$$

donc la partie réelle de z_1 est égale à $-\frac{3}{5}$ et sa partie imaginaire vaut $\frac{6}{5}$. De la même façon a pour z_2 :

$$z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{2^2+(-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{2+i+2i-1}{2^2+(-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{1+6i-9}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$$

On peut obtenir ce résultat par un autre chemin, par exemple

$$z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(1+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{1+2i-1}{4-4i-1} = \frac{2i}{3-4i} = \frac{2i(3+4i)}{3^2+(-4)^2} = \frac{6i-8}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$$

Et enfin pour z_3 on obtient

$$z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{(2+5i)(1+i)+(2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{1^2-i^2} = -\frac{6}{2} = -3$$

Remarque.
Nous avons utilisé dans l'exemple ci-dessus l'identité remarquable suivante

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Nous rappellons ici ces identités remarquables. Elles sont des égalités qui permettent de développer ou de factoriser facilement une expression. Les plus classiques sont celles de degré 2, valables pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

On utilise aussi régulierement celles de degré 3 :

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 - b^3 &= (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \end{aligned}$$

Plus généralement, les deux premières formules se généralisent aux puissances n-ième avec la formule du binôme de Newton

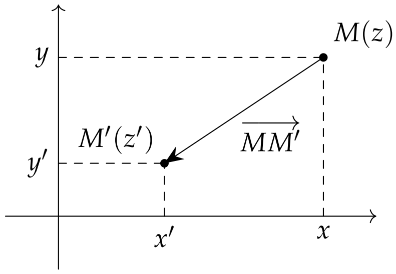
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ est appelé coefficient binomial. C'est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. Par exemple, dans un ensemble à 4 éléments $\{a, b, c, d\}$, il y a $\binom{4}{2} = 6$ parties à deux éléments, à savoir : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.

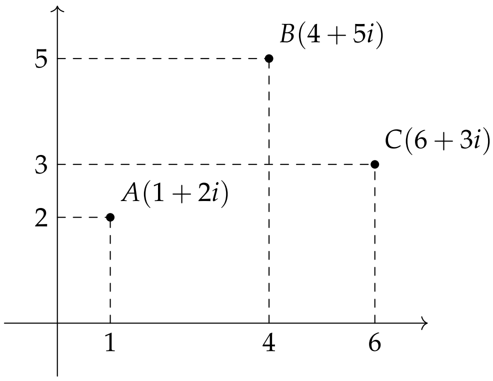
1.2 Interprétation géométrique

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A chaque nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point M du plan complexe (x, y).

- Le point M est appelée **l'image** de z et est noté $M(z)$
- Le nombre complexe z est appelée **l'affixe** de M.
- Soient $M(z)$ et $M'(z')$, on appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ le nombre complexe $z' - z$.



Exemple 2.
Les points $A(1,2)$, $B(5,7)$ et $C(6,3)$ sont reprsentés ci-dessous.



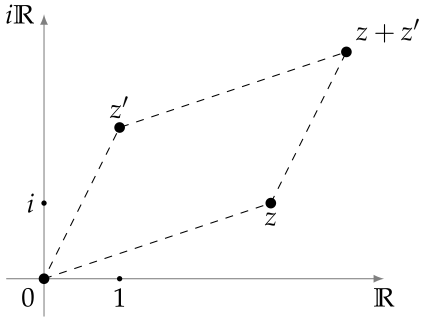
1.3 Opérations

L'ensemble $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, possède les opérations usuelles, i.e. l'addition et la multiplication, qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.

Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :

- **Addition** :

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$



- **Multiplication** :

$$(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx').$$

On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle avec la convention $i^2 = -1$.

Exemple 3.
Soient deux points du plan $A(1,-2)$ et $B(-1,3)$. Les affixes des points A et B sont respectivement

$$z_A = 1-2i \quad \text{et} \quad z_B = -1+3i.$$

On peut associer aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ les même affixes que les point A et B. Le vecteur $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ a donc pour coordonnées $(1-1,-2+3)=(0,1)$. Son affixe est donc $z=0+i$. En effet on a

$$z = z_A + z_B = (1-2i)+(-1+3i) = 0+i = i.$$

On peut également calculer $z_A z_B$. On trouve

$$\begin{aligned} z_A z_B &= (1-2i)(-1+3i) \\ &= -1+3i+2i-6i^2 \\ z_A z_B &= 5+5i \end{aligned}$$

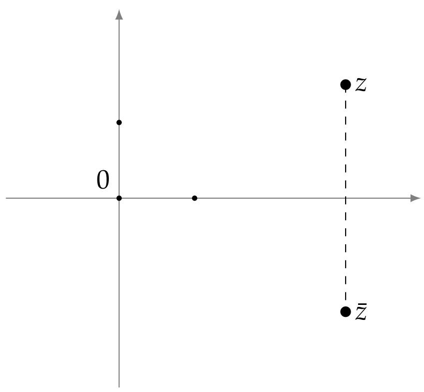
1.4 Conjugué et module

Définition 3 (Conjugué)**.**
Soit

$$z = x+iy$$

avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z, le nombre complexe

$$\bar{z} = x-iy.$$



Remarque.
Le point $M'(\bar{z})$ est le symétrique du point $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple 4.
On donne $z=3+i\sqrt{3}$ et $z'=-1+2i$. Nous allons écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = z-\overline{z'} \quad \text{et} \quad z_2 = z\cdot\bar{z}$$

On écrit

$$\begin{aligned} z_1 &= z-\overline{z'} = 3+\sqrt{3}i-(-1-2i) = 3+\sqrt{3}i+1+2i = 4+(\sqrt{3}+2)i \\ z_2 &= z\cdot\bar{z} = \left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right) = 3^2+(\sqrt{3})^2 = 12 \end{aligned}$$

Proposition 1.
Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $Re\,(z) = Re\,(\overline{z})$
- $Im\,(z) = -Im\,(\overline{z})$
- $Re\,(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
- $Im\,(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $z = -\overline{z} \iff$ *z est un imaginaire pur*
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- *Si* $z \neq 0$, *alors* $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
- *Si* $z' \neq 0$, *alors* $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Remarque.
Soient z et z' deux nombres complexes exprimés sous forme algébrique, avec $z' \neq 0$.
Pour déterminer la forme algébrique du quotient

$$\frac{z}{z'},$$

il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z'}$. Cela donne :

$$\frac{z}{z'} = \frac{z \cdot \overline{z'}}{z' \cdot \overline{z'}}.$$

Cette méthode permet que le dénominateur $z' \cdot \overline{z'}$ soit un réel.

Exemple 5.
Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivant :

$$z_1 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1+2i}{1-2i}$$

On a pour z_1

$$z_1 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)} = \frac{1}{3-i+6i+2} = \frac{1}{5+5i} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+i} = \frac{1}{5} \times \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i$$

et pour z_2

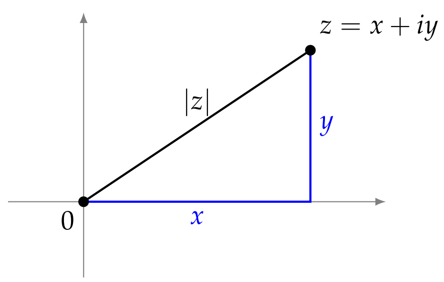
$$z_2 = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{(1+2i)^2}{5} = \frac{1+4i-4}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Définition 4 (Module)**.**
Soit

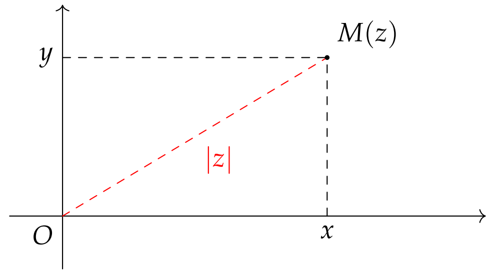
$$z = x + iy$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle module de z, le réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Remarque.
Pour un point $M(z)$, le le module de z représente la distance OM

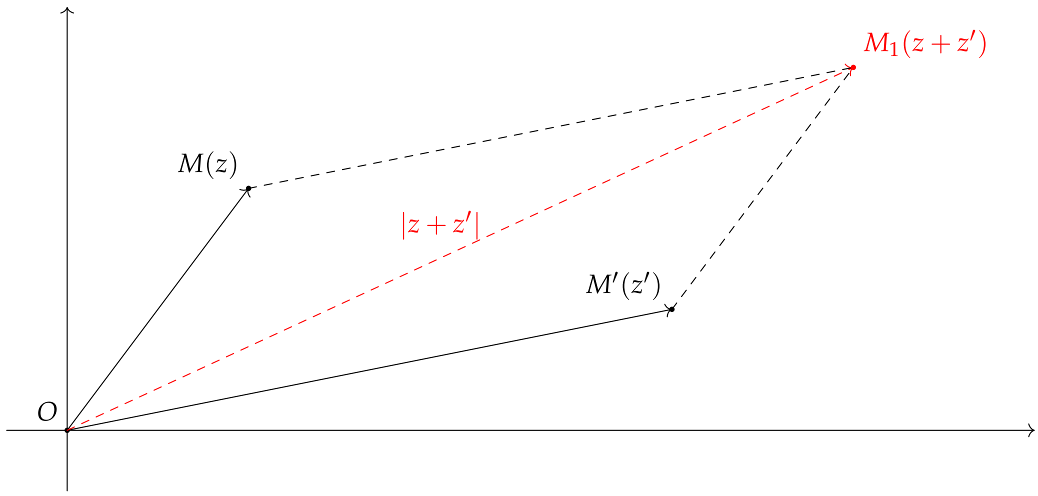


Proposition 2.
Soient z et z' deux nombres réels. Alors :

- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|Re(z)| \leq |z|$
- $|Im(z)| \leq |z|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- *Si* $z \neq 0$ *alors* $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- *Si* $z' \neq 0$ *alors* $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$

Théorème 1 (Inégalité triangulaire)**.**
Soient z et z' deux nombres réels. Alors :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$



Exemple 6.
Calculer les modules des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + 2i$
   La réponse est
   $$|z_1| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$
2. $z_2 = 2 - 3i$
   La réponse est
   $$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$
3. $z_3 = -1 - 5i$
   La réponse est
   $$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$
4. $z_4 = 3$
   La réponse est
   $$|z_4| = \sqrt{3^2} = 3$$

5. $z_5 = -6$

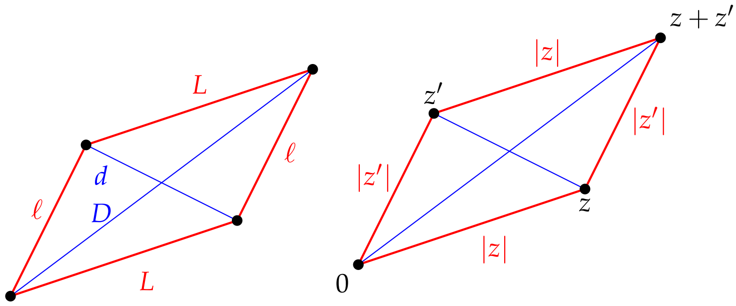
   La réponse est
$$|z_5| = \sqrt{(-6)^2} = 6$$
   Pour un nombre réel, le module coincide avec la valeur absolue, d'où la notation.

6. $z_6 = 8i$

   La réponse est
$$|z_6| = \sqrt{8^2} = 8$$

Exemple 7.
Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés.

Si les longueurs des côtés sont notées L et ℓ et les longueurs des diagonales sont D et d alors il s'agit de montrer l'égalité
$$D^2 + d^2 = 2\ell^2 + 2L^2.$$



Cela devient simple si l'on considère que notre parallélogramme a pour sommets 0, z, z' et le dernier sommet est donc $z+z'$. La longueur du grand côté est ici $|z|$, celle du petit côté est $|z'|$. La longueur de la grande diagonale est $|z+z'|$. Enfin il faut se convaincre que la longueur de la petite diagonale est $|z-z'|$.

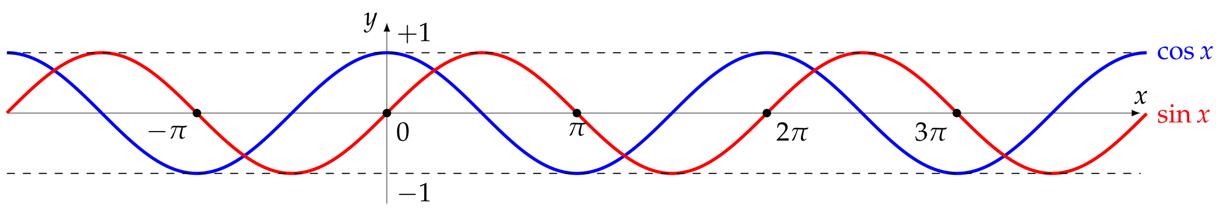
$$\begin{aligned}
D^2 + d^2 &= \left|z+z'\right|^2 + \left|z-z'\right|^2 \\
&= \left(z+z'\right)\overline{\left(z+z'\right)} + \left(z-z'\right)\overline{\left(z-z'\right)} \\
&= z\bar{z} + z\overline{z'} + z'\bar{z} + z'\overline{z'} + z\bar{z} - z\overline{z'} - z'\bar{z} + z'\overline{z'} \\
&= 2z\bar{z} + 2z'\overline{z'} = 2\left|z\right|^2 + 2\left|z'\right|^2 \\
&= 2\ell^2 + 2L^2
\end{aligned}$$

2 Argument et Trigonométrie

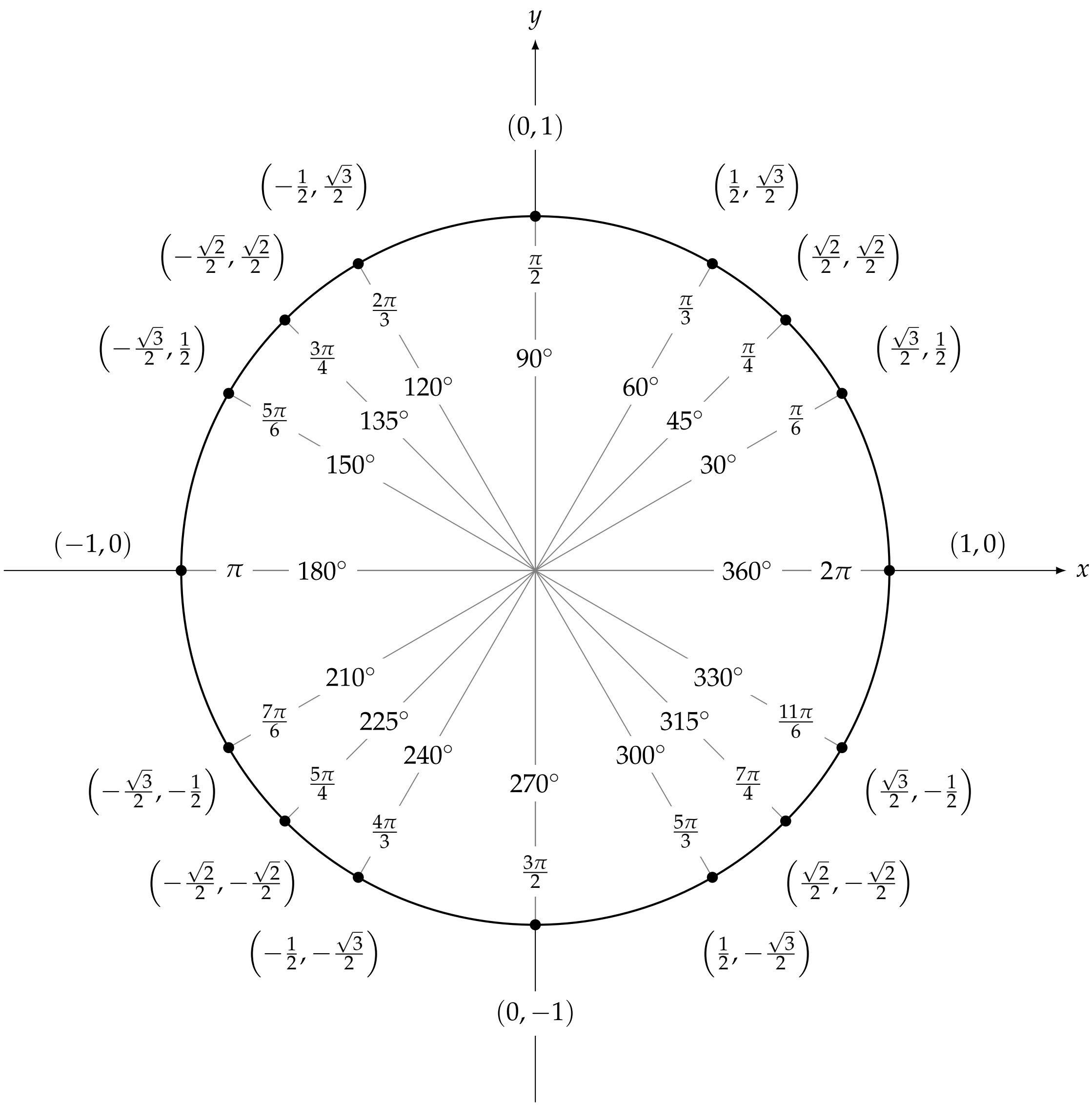
2.1 Rappels de trigonométrie

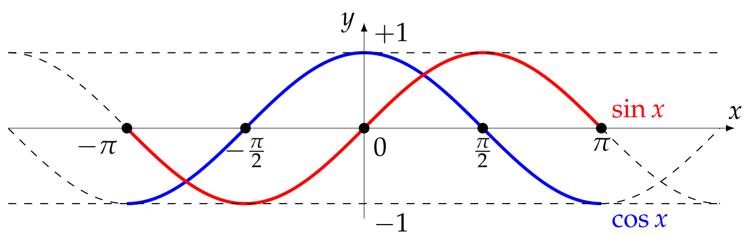
Voici le cercle trigonométrique (de rayon 1), le sens de lecture est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre. Les angles remarquables sont marqués de 0 à 2π (en radian) et de 0° à 360°. Les coordonnées des points correspondant à ces angles sont aussi indiquées. On lit la valeur du cosinus sur l'axe des abscisses et celle du sinus sur l'axe des ordonnées.

La fonction cosinus est périodique de période 2π et elle paire (donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). La fonction sinus est aussi périodique de période de 2π mais elle impaire (donc symétrique par rapport à l'origine).



Voici un zoom sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.





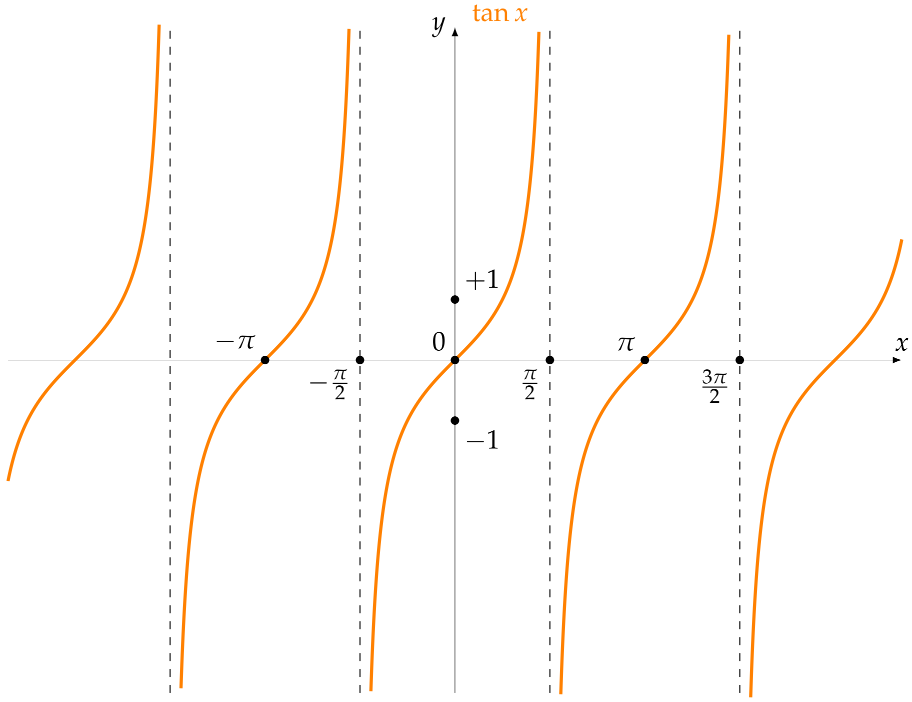
Pour tout x n'appartenant pas à

$$\left\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$$

la fonction tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π, c'est une fonction impaire.



Formulaire

Voici un lien d'une vidéo présentant un moyen simple de retenir l'intégralité du formulaire de trigonométrie. La première relation fondamentale est

$$\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$$

Les **formules d'additions**

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cdot\cos(b)-\sin(a)\cdot\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cdot\cos(b)+\sin(b)\cdot\cos(a)\\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\cdot\tan(b)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= 2\cos^2(a)-1 \;=\; 1-2\sin^2 a\\ &= \cos^2 a-\sin^2 a\\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cdot\cos(a)\\ \tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}\end{aligned}$$

Il est bon de connaître par cœur les **formules de duplications** ci-contre (faire $a=b$ dans les formules d'additions).

Les **formules de linéarisation** :

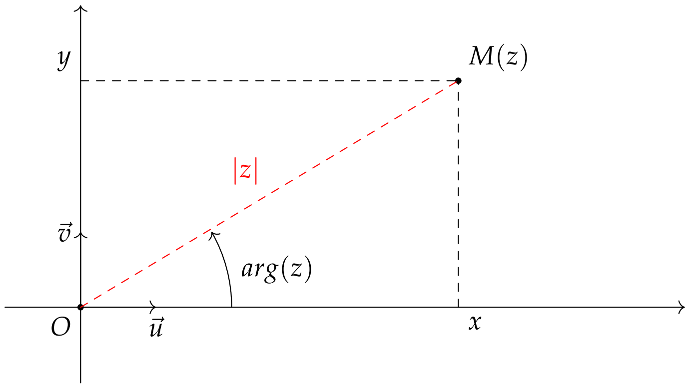
$$\begin{aligned}\cos(a)\cdot\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)\\ \sin(a)\cdot\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)\\ \sin(a)\cdot\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)\end{aligned}$$

Les **formules de factorisation** :

$$\begin{aligned}\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \cos(p)-\cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)-\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

2.2 Argument

Définition 5 (Argument).
Soit z un nombre complexe non nul. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on appelle argument de z, noté $\arg(z)$, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right)$ où M est l'image de z.



L'argument d'un nombre complexe est défini à un multiple de 2π près. Autrement dit, θ et ϕ sont deux arguments d'un meme nombre complexe non nul si et seulement si $\theta - \varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si on considère deux points M et M' respectivement d'affixe z et z', alors

$$\arg\left(z' - z\right) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{MM'}\right) \; [2\pi].$$

Proposition 3.
L'argument satisfait les propriétés suivantes :

- $\arg\left(zz'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right) \; [2\pi]$
- $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z) \; [2\pi]$
- $\arg\left(1/z\right) = -\arg(z) \; [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg z \; [2\pi]$

Exemple 8.
On donne θ_0 un réel tel que

$$\cos\left(\theta_0\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\theta_0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants, en fonction de θ_0.

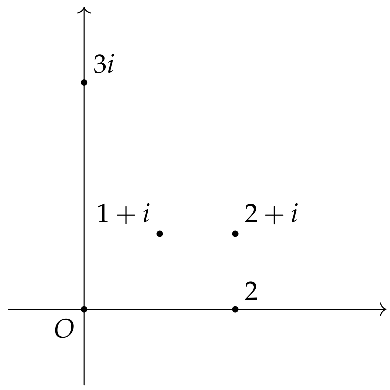
$$a = 3i(2+i)(4+2i)(1+i) \quad \text{et} \quad b = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$$

On débute par calculer le module de a.

$$\begin{aligned}
|a| &= |3i(2+i)(4+2i)(1+i)| \\
&= |3i| \times |2+i| \times |4+2i| \times |1+i| \\
&= 3 \times \sqrt{2^2+1^2} \times \sqrt{4^2+2^2} \times \sqrt{1^2+1^2} \\
|a| &= 30\sqrt{2}
\end{aligned}$$

l'argument de a

$$\begin{aligned}
\arg(a) &= \arg\Big(3i(2+i)(4+2i)(1+i)\Big) \\
&= \arg(3i) + \arg(2+i) + \arg(4+2i) + \arg(1+i) + 2k\pi \\
&= \arg(3i) + \arg(2+i) + \arg(2) + \arg(2+i) + \arg(1+i) + 2k\pi
\end{aligned}$$



Donc

$$\begin{aligned}\arg(a) &= \frac{\pi}{2} + \arg(2+i) + \arg(2(2+i)) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{3\pi}{4} + \arg(2+i) + \arg(2) + \arg(2+i) + 2k\pi \\ &= \frac{3\pi}{4} + 2\arg(2+i) + 2k\pi\end{aligned}$$

Soit θ un argument de $2+i$, on a alors

$$\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

donc $\cos(\theta) = \cos(\theta_0)$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta_0)$, on en déduit que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$. On peut donc écrire

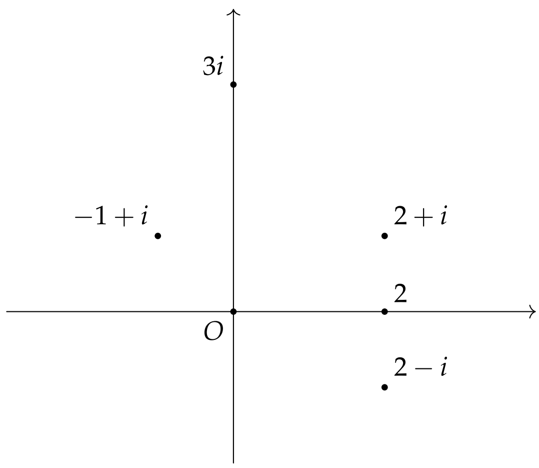
$$\arg(a) = \frac{3\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi$$

Calculons à présent le module de b

$$|b| = \left|\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}\right| = \frac{|4+2i| \times |-1+i|}{|2-i| \times |3i|} = \frac{2 \times |2+i| \times \sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2} \times 3} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

et l'argument de b

$$\begin{aligned}\arg(b) &= \arg(4+2i) + \arg(-1+i) - \arg(2-i) - \arg(3i) + 2k\pi \\ &= \arg(2) + \arg(2+i) + \arg(-1+i) - \arg(2-i) - \arg(3i) + 2k\pi\end{aligned}$$



Donc

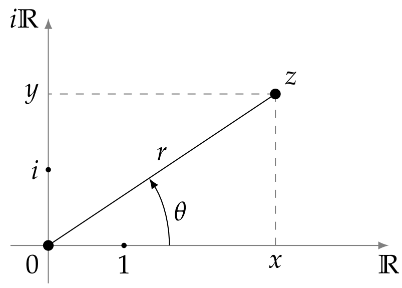
$$\begin{aligned}\arg(b) &= \theta_0 + \frac{3\pi}{4} - (-\theta_0) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi\end{aligned}$$

2.3 Forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul, tel que $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons

$$r = |z| \quad \text{et} \quad \theta \text{ un argument de } z$$

on a alors : Il y a une figure à faire ici :)



On a donc

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r\sin(\theta)$$

La forme trigonométrique de z s'écrit

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Définition 6.
Soit z un nombre complexe non nul. Si $r = |z|$ et θ un argument de z, alors la forme trigonométrique de z s'écrit

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Exemple 9.
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + 3i \qquad \text{et} \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

On a

$$z_1 = 3(1+i) \text{ donc } |z_1| = 3|1+i| = 3 \times \sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$$

Si on ne met pas 3 en facteur

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

C'est moins simple.
On appelle θ_1 un argument de z_1

$$\cos(\theta_1) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

d'où

$$z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Autre méthode, on met le module en facteur.

$$z_1 = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

On a

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Soit θ_2 un argument de z_2, on écrit

$$\cos(\theta_2) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\theta_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, d'où

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Autre méthode, on met le module en facteur

$$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

2.4 Forme exponentielle

Définition 7.
Soit z un nombre complexe non nul. Si $r = |z|$ et θ un argument de z, alors la forme exponentielle de z s'écrit

$$z = re^{i\theta}$$

Remarque.
On peut écrire à notre convenance $e^{i\theta}$ ou $\exp(i\theta)$. Les deux notations indiquent l'exponentielle.

Proposition 4.
Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ *on a*

- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$
- $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Remarque.
En utilisant la forme exponentielle d'un nombre complexe et les propriétés précédentes, on peut écrire pour z et z', deux nombres complexes non nuls tels que

$$z = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad z' = r'e^{i\theta'}$$

les relations suivantes

- $z \cdot z' = r \cdot r' \cdot e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'} \cdot e^{i(\theta-\theta')}$

Exemple 10.
Soit $z = \sqrt{3} + 3i$, écrit z^6 sous forme algébrique. On peut calculer le module de z,

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

ainsi qu'un argument de z,

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

donc $\theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On en déduit alors la forme exponentielle de z,

$$z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

D'où

$$\begin{aligned} z^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^6 \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 &\iff z^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^6 e^{i\frac{\pi}{3}\times 6} \\ &\iff z^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^6 e^{2i\pi} \\ &\iff z^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^6 \quad \text{car} \quad e^{2i\pi} = 1 \end{aligned}$$

Finalement on a $z^6 = 1728$

Exemple 11.
Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i} \qquad z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 \qquad z_3 = (1+i\sqrt{3})^4 \qquad z_4 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 \qquad z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$$

On a

$$z_1 = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

de la même façon

$$z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

Pour z_3 on écrit

$$z_3 = (1+i\sqrt{3})^4 = \left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^4 = 2^4\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

Il est nécessaire de travailler un peu plus pour z_4

$$\begin{aligned} z_4 &= (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 \\ &= \left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5 + \left(2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5 \\ &= 2^5\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 + 2^5\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^5 \\ &= 32\left(e^{\frac{5i\pi}{3}} + e^{-\frac{5i\pi}{3}}\right) = 32\times 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ &= 64\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z_4 &= -32 \end{aligned}$$

Pour z_5 deux méthodes s'offrent à nous. Première méthode,

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

et seconde méthode

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2.5 Formules d'Euler et de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on rappelle que

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

Définition 8 (Formules d'Euler).
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Définition 9 (Formule de Moivre).
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Ainsi

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Remarques.

- La **formule de Moivre** permet, en développant $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$, d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de puissances $\cos(\theta)$ et $\cos(\theta)$.
- Les **formules d'Euler** permettent de linéariser $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$, c'est à dire de les exprimer linéairement en fonction de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ avec $(0 \leq k \leq n)$.

Exemple 12.
Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

On rappelle que

$$\cos(3\theta) = Re\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3\right)$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned}
(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 &= \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta) \times i\sin(\theta) + 3\cos(\theta) \times (i\sin(\theta))^2 + (i\sin(\theta))^3 \\
&= \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta) \times i\sin(\theta) + 3\cos(\theta) \times i^2\sin^2(\theta) + i^3\sin^3(\theta) \\
(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 &= \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta)
\end{aligned}$$

Or $\cos(3\theta) = Re\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3\right)$ D'où

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$

Exemple 13.
Linéariser $\sin^3(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$. Il vient alors que :

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3}{(2i)^3} \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3\left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)\right) \\
\sin^3(\theta) &= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin(3\theta) - 3(2i\sin(\theta))\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\sin^3(\theta) = -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta).$$

3 Racines nième d'un nombre complexe

3.1 Cas général

Définition 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et a un nombre complexe non nul. On appelle **racine nième** de a, tout nombre complexe z solution de l'équation
$$z^n = a.$$

Théorème 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un nombre complexe non nul tel que
$$a = re^{i\theta}$$
où $r > 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$. Le nombre complexe a admet n racines nièmes distinctes définies par
$$z_k = \sqrt[n]{r}\ \exp\left(i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$
où $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$.

Remarque.
En effet on a
$$\begin{aligned} z^n = a &\Longleftrightarrow z^n = re^{i\theta} \\ &\Longleftrightarrow z = \sqrt[n]{re^{i\theta}} \\ &\Longleftrightarrow z = \sqrt[n]{r}\ \sqrt[n]{e^{i\theta}} \\ &\Longleftrightarrow z = \sqrt[n]{r}\ e^{i\theta/n} \end{aligned}$$
De plus on sait que deux nombres complexes ont le même argument à un multiple de 2π près.

Exemple 14.
Calculons les racines cubiques de $a = 8i$. Nous allons commencer par donner la forme exponentielle de a. Nous avons directement
$$a = 8i = 8\ e^{i\frac{\pi}{2}}$$
Les racines cubiques de a sont les solutions de l'équation
$$z^3 = a.$$
Ces solutions sont
$$z_k = \sqrt[n]{r}\ \exp\left(i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$
avec $k \in \{0; 1; 2\}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 8$ et $n = 3$. Ce qui permet d'écrire
$$z_k = \sqrt[3]{8}\ \exp\left(i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right)$$
ou encore
$$z_k = 2\ \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$
avec toujours $k \in \{0; 1; 2\}$, car ici $n = 3$. Nous en déduisons alors que
$$z_0 = 2\ \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\ e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = 2\ \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\ e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = 2\ \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\ e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2\left(0 - \frac{1}{2}i\right) = -2i$$

Les racines cubiques de $a = 8i$ sont

$$S = \left\{ \sqrt{3} + i\ ;\ -\sqrt{3} + i\ ;\ -2i \right\}$$

3.2 Interprétation géométrique

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a un nombre complexe non nul et pour k appartenant à $\{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$ on note

$$z_k = \sqrt[n]{r}\ \exp\left(i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

les racines nièmes complexes de a.

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère d'origine O, les points A_k d'affixe z_k. On a,

$$|z_k| = \left|\sqrt[n]{r}\ \exp\left(i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)\right| = \sqrt[n]{r}$$

Ce qui permet d'écrire,

$$OA_k = \sqrt[n]{r}$$

De plus $\forall k \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$,

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{\sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta+2(k+1)\pi}{n}\right)}}{\sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}} = \frac{e^{i\left(\frac{\theta+2(k+1)\pi}{n}\right)}}{e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}} = \frac{e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \cdot e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}{e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \cdot e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

Pour passer du point d'afixe z_k à z_{k+1} sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$, il suffit d'effectuer une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ dans le sens trigonométrique.

On peut alors introduire le théorème suivant.

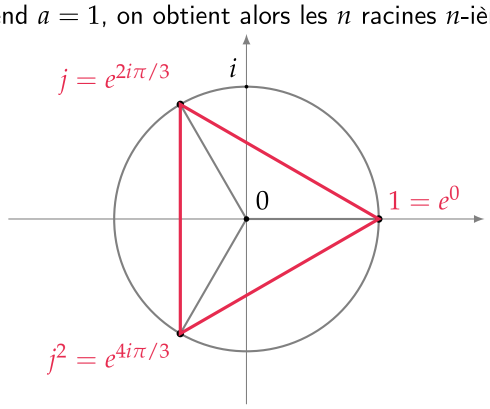
Théorème 3.
Soient

- *n un entier naturel srtrictement supérieur à 2,*
- *$a = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul,*
- *$\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.*

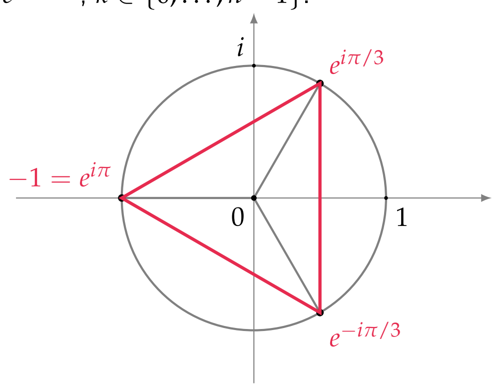
Les images des n racines nièmes de a sont les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.

Remarque.
Si $n = 2$, les images des deux racines carrées de a sont diamétralement opposées sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exemple 15.
On prend $a = 1$, on obtient alors les n racines n-ièmes de l'unité $e^{2ik\pi/n}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.



Racine 3-ième de l'unité ($a = 1$, $n = 3$)



Racine 3-ième de -1 ($a = -1$, $n = 3$)

3.3 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 11.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité toute racine nième de 1.

Théorème 4.
Soit $n \in \mathbb{N}$, 1 admet n racines n-ièmes distinctes définies par

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

où $k \in \{0;1;2;\ldots;n\}$.

Exemple 16.
Les deux racines carrées de l'unité sont définies par

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{2}}$$

où $k \in \{0;1\}$. Ainsi :

$$\omega_0 = e^{i\frac{2\times0\pi}{2}} = e^0 = 1\ ; \qquad \omega_1 = e^{i\frac{2\times1\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1\ .$$

Exemple 17.
Les racines cubiques de l'unité sont définies par

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$$

où $k \in \{0;1;2\}$. Ainsi :

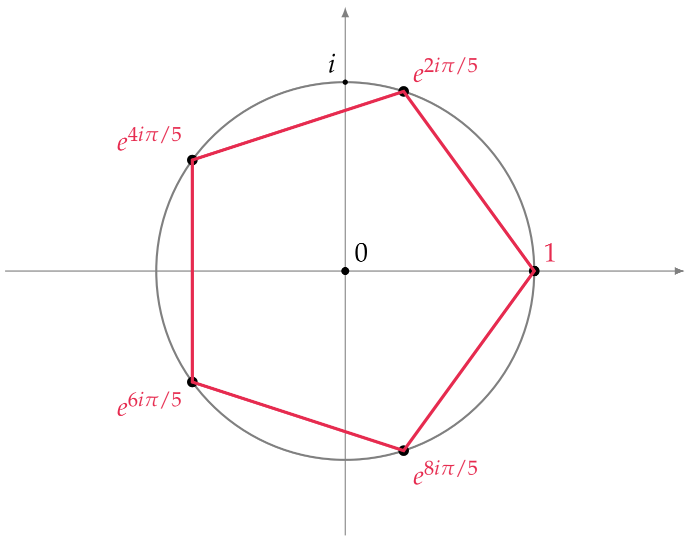
$$\omega_0 = e^{i\frac{2\times0\pi}{3}} = e^0 = 1\ ; \qquad \omega_1 = e^{i\frac{2\times1\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j\ ; \qquad \omega_2 = e^{i\frac{2\times2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}\ .$$

Proposition 5.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Exemple 18.
Les racines cinquième de l'unité sont définies par

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$$

où $k \in \{0;1;2;3;4\}$. Graphiquement on a :



Les racines 5-ième de l'unité ($a = 1$, $n = 5$) forment un pentagone régulier.

4 Racines carrées d'un nombre complexe et équations du second degré

4.1 Calcul des racines carrées

Définition 12.
Tout nombre complexe Z non nul admet deux racines carrées opposées.

Nous allons déterminer de manière algébrique les racines carrées d'un nombre complexe. Posons

$$Z = a + ib$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche

$$z = x + iy$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z^2 = Z.$$

On a

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

On peut alors écrire

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

De plus $|z^2| = |z|^2 = |Z|$ permet d'écrire

$$|z|^2 = |Z| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On a donc

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Exemple 19.
Déterminons les racines carrées de

$$Z = 3 - 4i.$$

On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z^2 = Z$$

Ainsi $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, de plus $|z^2| = |z|^2 = |Z|$. On obtient le système suivant

$$\begin{aligned}
z^2 = Z &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 5 + 3 \\ xy = -2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2x^2 = 8 \\ xy = -2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 = 4 \\ xy = -2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 4 - y^2 = 3 \\ x^2 = 4 \\ xy = -2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y^2 = 1 \\ x^2 = 4 \\ xy = -2 \end{cases} \\
z^2 = Z &\iff \begin{cases} y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -1 \\ x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2 \\ xy = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les deux racines carrées de Z sont alors $z_1 = -2 + i$ et $z_2 = 2 - i$

Exemple 20.

Calculer les racines carrées de $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z^2 = Z$$

Ainsi $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, de plus $|z^2| = |z|^2 = |Z|$. On peut alors écrire

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 2y^2 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ xy = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ xy = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Les valeurs possibles de X sont $\pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et les valeurs possibles de y sont $\pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'après l'équation $xy = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, on en déduit que $xy > 0$ et que donc x et y sont de même signe.

- Si $x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

- Si $x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $y = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

D'autre part

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} = z^2$$

admet deux solutions

$$z_3 = e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \qquad \text{et} \qquad z_4 = -e^{i\frac{\pi}{8}} = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Comme

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$$

on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \iff \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

4.2 Application à la résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Proposition 6.
L'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, possède ***deux solutions*** *$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Soit*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

le discriminant et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que

$$\Delta = \delta^2$$

Alors les solutions sont

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

Démonstration. On écrit la factorisation

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\delta}{2a}\right)\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\delta}{2a}\right)\\
&= a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\\
&= a\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)
\end{aligned}$$

Donc le polynôme s'annule si et seulement si $z = z_1$ ou $z = z_2$. □

Exemple 21.
Nous allon résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$2z^2 - (1+5i)\,z - 2\,(1-i) = 0$$

On a

$$\Delta = (1+5i)^2 - 4 \times 2 \times (-2\,(1-i)) = 1 + 10i - 25 + 16 - 16i = -8 - 6i.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\delta^2 = -8 - 6i &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \\ 2xy = -6 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2 = -8 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2 = -8 + y^2 \\ -8 + y^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\delta^2 = -8-6i \iff \begin{cases} x^2 = -8+y^2 \\ y^2 = 9 \\ xy = -3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = -8+9 \\ y^2 = 9 \\ xy = -3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = -3 \end{cases}$$
$$\delta^2 = -8-6i \iff \begin{cases} x = 1 & \text{ou} \quad x = -1 \\ y = 3 & \text{ou} \quad y = -3 \\ xy = -3 \end{cases}$$

Les deux racines carrées de Δ sont alors

$$\delta_1 = 1-3i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -1+3i$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{1+5i+\delta_1}{4} = \frac{1+5i+1-3i}{4} = \frac{1+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1+5i-\delta_1}{4} = \frac{1+5i-(1-3i)}{4} = 2i$$

5 Exercices

Vous pouvez continuer à vous exercer sur votre espace jai20enmaths, où vous y retrouverez des notions de cours ainsi que des exercices corrigés. Si vous remarquez une erreur ou avez une suggestion pour que cet espace de travail soit plus agréable à utiliser, ne surtout pas hésiter à me le signaler par mail à a.gere@istom.fr.

Exercice 1 Forme algébrique - Somme et produits

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2+5i)+(i+3)$
2. $z_2 = 4(-2+3i)+3(-5-8i)$
3. $z_3 = (2-i)(3+8i)$
4. $z_4 = (1-i)\overline{(1+i)}$
5. $z_5 = i(1-3i)^2$
6. $z_6 = (1+i)^3$

Indication ▼ Correction ▼ [14.0121]

Exercice 2

Mettre sous la forme algébrique $a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ les nombres complexes suivants

1. $z_1 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$
2. $z_2 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$
3. $z_3 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$
4. $z_4 = \dfrac{5+2i}{1-2i}$
5. $z_5 = \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
6. $z_6 = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$
7. $z_7 = -\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}$
8. $z_8 = \dfrac{1}{(1+2i)(3-i)}$
9. $z_9 = \dfrac{1+2i}{1-2i}$

Correction ▼ [14.0038]

Exercice 3

Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres

$$\frac{3+6i}{3-4i}\quad;\quad\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}\quad;\quad\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [14.0019]

Exercice 4

Ecrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Indication ▼ Correction ▼ [14.0020]

Exercice 5

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\dfrac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Correction ▼ [14.0021]

Exercice 6

Calculer le module et l'argument de $u=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v=1-i$. En déduire le module et l'argument de $w=\dfrac{u}{v}$.

Indication ▼ Correction ▼ [14.0023]

Exercice 7

On donne θ_0 un réel tel que $\cos(\theta_0)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta_0)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Calculer, en fonction de θ_0, le module et l'argument des nombres complexes

$$a=3i(2+i)(4+2i)(1+i)\qquad\text{et}\qquad b=\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}.$$

Correction ▼ [14.0037]

Exercice 8

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

1. $z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$
2. $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$
3. $z_3 = 3e^{-\frac{7i\pi}{8}}$
4. $z_4 = \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$
5. $z_5 = \dfrac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$
6. $z_6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)$
7. $z_7 = \dfrac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}$
8. z_8, le nombre de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$
9. z_9 le nombre de module 3 et d'argument $-\dfrac{\pi}{8}$.

Correction ▼ [14.0039]

Exercice 9

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

1. $z_1 = \dfrac{1+i}{1-i}$
2. $z_2 = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$
3. $z_3 = (1+i\sqrt{3})^4$
4. $z_4 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
5. $z_5 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$
6. $z_6 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$

Correction ▼ [14.0045]

Exercice 10

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\dfrac{5\pi}{6}$.
3. Quotient du nombre complexe de modulo 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Correction ▼ [14.0041]

Exercice 11

Linéariser les expressions suivantes.

1. $A(x) = \cos^3(x)$
2. $B(x) = \sin^3(x)$
3. $C(x) = \cos^4(x)$
4. $D(x) = \sin^4(x)$
5. $E(x) = \cos^2(x)\sin^2(x)$
6. $F(x) = \cos(x)\sin^3(x)$
7. $G(x) = \cos^3(x)\sin(x)$
8. $H(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)$
9. $I(x) = \cos^2(x)\sin^3(x)$
10. $J(x) = \cos(x)\sin^4(x)$

Correction ▼ [14.0089]

Exercice 12

Soit $u = 1 + i$ et $v = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

Correction ▼ [14.0043]

Exercice 13

Etablir les égalités suivantes :

1. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$
2. $(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$
3. $\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

Correction ▼ [14.0042]

Exercice 14

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

1. $z_1 = -1$
2. $z_2 = i$
3. $z_3 = 1 + i$
4. $z_4 = -1 - i$
5. $z_5 = 1 + i\sqrt{3}$
6. $z_6 = 3 + 4i$
7. $z_7 = 7 + 24i$
8. $z_8 = 3 - 4i$
9. $z_9 = 24 - 10i$

Correction ▼ [14.0046]

Exercice 15

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction ▼ [14.0047]

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$
3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$
4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$
5. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$
6. $4z^2 - 2z + 1 = 0$
7. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$
8. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$
9. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$
10. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$
11. $z^3 + 3z - 2i = 0$
12. $z^2 - (1 + a)(1 + i)z + \left(1 + a^2\right) i = 0$
13. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$
14. $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$
15. $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$
16. $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$

Correction ▼ [14.0048]

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [14.0052]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Attention ! Il y a un symbole de conjugaison dans z_4.
Pour les deux premiers exemples, il suffit de regrouper. Pour les produits, il faut développer puis regrouper.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Pour se "débarrasser" d'un dénominateur écrivez

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Indication pour l'exercice 4 ▲

Il faut bien connaître ses formules trigonométriques. En particulier si l'on connait $\cos(2\theta)$ ou $\sin(2\theta)$ on sait calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Passez à la forme trigonométrique. Souvenez-vous des formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Indication pour l'exercice 17 ▲

Poser $Z = Z^3$ et résoudre d'abord $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On regroupe simplement les parties réelles et les parties imaginaires. On trouve

$$z_1 = 5 + 6i$$

2. De la même façon,

$$z_2 = (-8 + 12i) + (-15 - 24i) = -23 - 12i$$

3. On développe, puis on regroupe pour trouver :

$$z_3 = 6 + 16i - 3i + 8 = 14 + 13i$$

4. On écrit

$$z_4 = (1-i)(1-i) = 1 - 2i - 1 = -2i$$

5. On commence par calculer $(1-3i)^2$:

$$(1-3i)^2 = 1 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$$

On multiplie ensuite par $\boldsymbol{i}$:

$$i(1-3i)^2 = -8i - 6i^2 = 6 - 8i$$

6. Le plus simple est de tout développer, en utilisant la formule du binôme de Newton ou, pour ceux qui ne la connaissent pas (encore), en écrivant $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i)$. On trouve

$$\begin{aligned} z_6 &= (1+i)^3 \\ &= (1+i)^2(1+i) \\ &= \left(1 + 2i + i^2\right)(1+i) \\ &= (1 + 2i - 1)(1+i) \\ &= 2i(1+i) \\ &= 2i + 2i^2 \\ &= -2 + 2i \end{aligned}$$

Avec la formule du binôme, on écrit simplement

$$z_6 = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$$

Correction de l'exercice 2 ▲

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} = z_1 = \frac{(3+6i)(3+4i)}{3^2 + (-4)^2} = \frac{9 + 12i + 18i - 24}{25} = \frac{-15 + 30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$$

$$z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{2^2 + (-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{2 + i + 2i - 1}{2^2 + (-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{1 + 6i - 9}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$$

Autre méthode

$$z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{(2-i)^2}=\frac{1+2i-1}{4-4i-1}=\frac{2i}{3-4i}=\frac{2i(3+4i)}{3^2+(-4)^2}=\frac{6i-8}{25}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$$

$$z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}=\frac{(2+5i)(1+i)+(2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{1^2-i^2}$$
$$=-\frac{6}{2}=-3$$

Autre méthode

$$z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}=\frac{2+5i}{1-i}+\overline{\frac{2+5i}{1-i}}=2\mathcal{R}e\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)$$

Or

$$\frac{2+5i}{1-i}=\frac{(2+5i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}=\frac{2+2i+5i-5}{2}=\frac{-3+7i}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$$

Donc

$$z_3=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$$

$$z_4=\frac{5+2i}{1-2i}=\frac{(5+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}=\frac{5+10i+2i-4}{5}=\frac{-1+12i}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{12}{5}i$$

$$z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$=-\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}\times i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-i\frac{3\sqrt{3}}{8}=-\frac{1}{8}+i\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{9}{8}-i\frac{3\sqrt{3}}{8}=1$$

Autre méthode

$$z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{2i\pi}=1$$

Ou encore

$$z_5=j^3=1$$
$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

On peut toujours s'amuser à développer $(1+i)^9$ et $(1-i)^7$ mais franchement ce n'est pas une bonne idée.

$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=(1+i)^2\frac{(1+i)^7}{(1-i)^7}=(1+i)^2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7=(1+2i-1)\left(\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}\right)^7$$
$$=2i\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^7=\frac{2i(2i)^7}{2^7}=\frac{2^8i^8}{2^7}=2i^8=2$$

Autre méthode

$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^7}=\frac{(\sqrt{2})^9\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9}{(\sqrt{2})^7\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^7}=\frac{(\sqrt{2})^2e^{i\frac{9\pi}{4}}}{e^{-i\frac{7\pi}{4}}}=2e^{i\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}\right)}=2e^{\frac{16i\pi}{4}}=2e^{4i\pi}$$
$$=2$$

$$z_7=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}}=-\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2}=-\frac{2(1+i\sqrt{3})}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Autre méthode

$$z_7 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{j} = \frac{j^2}{j^3} = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_8 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)} = \frac{1}{3-i+6i+2} = \frac{1}{5+5i} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+i} = \frac{1}{5} \times \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i$$

$$z_9 = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{(1+2i)^2}{5} = \frac{1+4i-4}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$ est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.$$

Soit $z = \dfrac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z + \bar{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}i$ et donc $z + \bar{z} = -3$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$.

2. $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
   Il nous reste à expliquer comment nous avons calculé $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$: posons $\theta = \frac{\pi}{8}$, alors $2\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2\theta)$. Mais $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Donc $\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$. Et ensuite $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$. Comme $0 \leq \theta = \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des nombres positifs. Donc

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $9 - 7i$
2. $-6i$
3. $-0,3 + 1,1i$

4. $-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$

Correction de l'exercice 6 ▲

Nous avons

$$u=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

$$\begin{aligned}|a|&=|\ 3i(2+i)(4+2i)(1+i)|=|3i|\times|2+i|\times|4+2i|\times|1+i|\\&=3\times\sqrt{2^2+1^2}\times 2\times|2+i|\times\sqrt{1^2+1^2}=6\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^2\times\sqrt{2}=6\times 5\sqrt{2}\\&=30\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(a)&=\arg(3i(2+i)(4+2i)(1+i))=\arg(3i)+\arg(2+i)+\arg(4+2i)+\arg(1+i)+2k\pi\\&=\frac{\pi}{2}+\arg(2+i)+\arg(2(2+i))+\frac{\pi}{4}+2k\pi\\&=\frac{3\pi}{4}+\arg(2+i)+\arg 2+\arg(2+i)+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2\arg(2+i)+2k\pi\end{aligned}$$

Soit θ un argument de $2+i,\cos(\theta)=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $\cos(\theta)=\cos(\theta_0)$ et $\sin(\theta)=\sin(\theta_0)$, on en déduit que $\theta=\theta_0+2k\pi$
Par suite

$$\arg(a)=\frac{3\pi}{4}+2\theta_0+2k\pi$$

$$|b|=\left|\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}\right|=\frac{|4+2i|\times|-1+i|}{|2-i|\times|3i|}=\frac{2\times|2+i|\times\sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\times 3}=\frac{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times 3}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned}\arg(b)&=\arg(4+2i)+\arg(-1+i)-\arg(2-i)-\arg(3i)+2k\pi=\theta_0+\frac{3\pi}{4}-(-\theta_0)-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\&=\frac{\pi}{4}+2\theta_0+2k\pi\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

$$z_1=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$$
$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$z_3=3e^{-\frac{7i\pi}{8}}=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)=3\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$
$$=3\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-3\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=-3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+3i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$z_4=\left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}=-2i$$
$$z_5=\frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\pi}=-2$$
$$z_6=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=6e^{\frac{7i\pi}{6}}=6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$z_7=\frac{2\sqrt{3}-3i}{3e^{\frac{i\pi}{3}}}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{2}{3}e^{\frac{8i\pi}{6}}=\frac{2}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$z_8=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$$
$$z_9=3e^{-i\frac{\pi}{8}}=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

A moins de connaitre $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ on ne peut pas faire mieux.

Correction de l'exercice 9 ▲

$$z_1=\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+1^2}=\frac{1+2i-1}{2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$z_2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3=e^{\frac{3i\pi}{2}}$$
$$z_3=(1+i\sqrt{3})^4=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^4=2^4\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4=16e^{\frac{4i\pi}{3}}$$
$$z_4=(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5+\left(2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5=2^5\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5+2^5\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^5$$
$$=32\left(e^{\frac{5i\pi}{3}}+e^{-\frac{5i\pi}{3}}\right)=32\times 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=64\left(-\frac{1}{2}\right)=-32$$
$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Autre méthode

$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(2+2i)}{2^2+(-2)^2}=\frac{2\sqrt{6}+2i\sqrt{6}-2i\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{8}=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

Remarque : il aurait mieux valu mettre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en facteur d'entrée.
Là on est mal parti, il va falloir trouver le module, puis le mettre en facteur,

$$z_6 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1))$$
$$|z_6| = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}\times 2\sqrt{2} = 1$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

Mais on ne connait pas d'angle vérifiant cela. Il faut faire autrement

$$|\sqrt{6}-i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$z_6 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i} = \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. $(3+2i)(1-3i) = 3-9i+2i-6i^2 = 3-7i+6 = 9-7i$

2.

$$2e^{i\frac{\pi}{3}}\times 3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -6i$$

3.

$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{5i\pi}{6}} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

$$A(X) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8}$$
$$= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8} = \frac{2\cos(3x)+3\times 2\cos(x)}{8}$$
$$= \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-8i}\\
&= \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}-3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{-8i} = \frac{2i\sin(3x)-3\times 2i\sin(x)}{-8i}\\
&= -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)\\
C(X) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}\\
&= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}+4\left(e^{2ix}+4e^{-2ix}\right)+6}{16} = \frac{2\cos(4x)+4\times 2\cos(2x)+6}{16}\\
&= \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}\\
&= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-4\left(e^{2ix}+4e^{-2ix}\right)+6}{16} = \frac{2\cos(4x)-4\times 2\cos(2x)+6}{16}\\
D(X) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix}-4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}-4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}\\
E(x) &= \cos^2(x)\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\
&= \frac{e^{2ix}+2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}}{4}\times\frac{e^{2ix}-2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}}{82x} = \frac{\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)}{-16}\\
&= \frac{e^{2ix}e^{2ix}-2e^{2ix}+e^{2ix}e^{-2ix}+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+e^{-2ix}e^{2ix}-2e^{-2ix}+e^{-2ix}e^{-2ix}}{-16}\\
&= \frac{e^{4ix}-2e^{2ix}+1+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+1-2e^{-2ix}+e^{-4ix}}{-16} = \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-2}{-16}\\
&= \frac{2\cos(4x)-2}{-16} = -\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Autre méthode en utilisant les formules trigonométriques

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \cos^2(x)\sin^2(x) = (\cos(x)\sin(x))^2 = \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{4}\times\frac{1-\cos(4x)}{2}\\
&= -\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

En utilisant les formules

$$
\begin{aligned}
&\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a), a = x\\
&\cos(2a) = 1-\sin^2(a) \Leftrightarrow \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}, a = 2x\\
F(x) &= \cos(x)\sin^3(x) = \cos(x)B(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}\\
&= \frac{e^{4ix}-3e^{2ix}+3-e^{-2ix}+e^{2ix}-3+3e^{-2ix}-e^{-4ix}}{-16i}\\
&= \frac{e^{4ix}-e^{-4ix}-2\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)}{-16i} = \frac{2i\sin(4x)-2\times 2i\sin(2x)}{-16i}\\
&= -\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x)=\cos^3(x)\sin(x)=A(x)\sin(x)&=\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\\
&=\frac{e^{4ix}-e^{2ix}+3e^{2ix}-3+3-3e^{-2ix}+e^{-2ix}-e^{-4ix}}{16i}\\
&=\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}+2\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)}{16i}=\frac{2i\sin(4x)+2\times 2i\sin(2x)}{16i}\\
&=\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)
\end{aligned}
$$

On peut toujours faire « comme d'habitude » améliorons un peu les choses

$$
\begin{aligned}
H(x)=\cos^3(x)\sin^2(x)=\cos(x)(\cos(x)\sin(x))^2=\cos(x)\left(\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right)^2&=\tfrac{1}{4}\cos(x)\sin^2(2x)\\
=\tfrac{1}{4}\cos(x)\left(\tfrac{1-\cos(4x)}{2}\right)=\tfrac{1}{8}\cos(x)(1-\cos(4x))=\tfrac{1}{8}\cos(x)&-\tfrac{1}{8}\cos(x)\cos(4x)
\end{aligned}
$$

Alors on utilise des formules souvent inconnues des étudiants (et c'est fort dommage) ou on fait comme d'habitude

$$
\begin{aligned}
H(x)&=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\cos(x)\cos(4x)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}\right)\\
&=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-3ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}\right)\\
&=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}+e^{-3ix}+e^{3ix}\right)\\
&=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}\Big(2\cos(5x)+2\cos(3x)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{1}{16}\cos(3x)\\
I(x)&=\cos^2(x)\sin^3(x)
\end{aligned}
$$

Allez, encore une autre technique !
On pose $t=\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow x=t-\frac{\pi}{2}$ ainsi $\cos(x)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(t)$ et $\sin(x)=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(t)$ Donc

$$
\begin{aligned}
I(x)&=\sin^2(t)\cos^3(t)=\frac{1}{8}\cos(t)-\frac{1}{16}\cos(5t)-\frac{1}{16}\cos(3t)\\
&=\frac{1}{8}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(5\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\cos\left(5x-\frac{5\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right)\\
&=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\sin(5x)+\frac{1}{16}\sin(3x)\\
J(x)&=\cos(x)\sin^4(x)=\cos(x)D(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-4e^{2ix}-4e^{-2ix}+6}{16}\\
&=\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-3ix}-4e^{3ix}-4e^{-ix}+6e^{ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}-4e^{ix}-4e^{-3ix}+6e^{-ix}\right)\\
&=\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}-3\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)\\
&=\frac{1}{32}(2\cos(5x)-3\times\cos(3x)+2\times 2\cos(x))\\
&=\frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{3}{32}\cos(3x)+\frac{1}{8}\cos(x)
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 12 ▲

cf également correction manuscrite.

1. $|u|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et $|v|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$

2.

$$u=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$.

$$v=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Donc un argument de v est $\frac{2\pi}{3}$.
3. On cherche les solutions complexes de $z^3=u$

$$z^3=u\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^3|=\sqrt{2}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.$$

u admet trois racines cubiques

$$z_0=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\quad z_1=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{9\pi}{12}}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}}\text{ et }z_2=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}$$

4.

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

Et

$$\frac{u}{v}=\frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{4}$$

Par conséquent

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(-\frac{5\pi}{12})=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(-\frac{5\pi}{12})=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1.

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=e^{i\frac{\pi}{7}}e^{-i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{7}}e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{12\pi}{84}-\frac{28\pi}{84}+\frac{21\pi}{84}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{84}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$

2.

$$(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{5}}e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{15\pi}{60}+\frac{12\pi}{60}-\frac{10\pi}{60}\right)}=2\sqrt{2}e^{-\frac{13i\pi}{60}}$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{-\frac{2i\pi}{12}}=e^{-\frac{i\pi}{6}}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

Correction de l'exercice 14 ▲

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=-1$

$$Z_1=-i \text{ et } Z_2=i$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$

$$z_1=-e^{i\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$Z_1=-2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}} \text{ et } Z_2=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ Autre méthode, on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=1+i \Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=1+i \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{r} a^2-b^2=1 \\ 2ab=1 \end{array}\right.$$

On rajoute l'équation L_3

$$\left|(a+ib)^2\right|=|1+i| \Leftrightarrow |a+ib|^2=\sqrt{1^2+1^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=-1+\sqrt{2} \Leftrightarrow b^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après $L_2 a$ et b sont de même signe donc les deux solutions de $z^2=1+i$ sont

$$Z_1=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2} \text{ et } Z_2=-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=-1-i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{5i\pi}{4}}$

$$Z_1=-2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{8}} \text{ et } Z_2=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$
Autre méthode, on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=-1-i \Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-1-i \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left\{\begin{array}{c} a^2-b^2=-1 \\ 2ab=-1 \end{array}\right.$$

On rajoute l'équation L_3

$$\left|(a+ib)^2\right|=|-1-i| \Leftrightarrow |a+ib|^2=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2=-1+\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}} \pm \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow b^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}} \pm \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après $L_2 a$ et b sont de signes opposés donc les deux solutions de $z^2=-1-i$ sont

$$Z_1=\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} \text{ et } Z_2=-\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } Z_2=-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=3+4i$

On pose $Z=a+ib, Z^2 \Leftrightarrow 3+4i=(a+ib)^2 \Leftrightarrow 3+4i=a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow L_1 \quad \left\{\begin{array}{c} a^2-b^2=3 \\ L_2 \\ 2ab=4 \end{array}\right.$

On rajoute l'équation $\left|Z^2\right| \Leftrightarrow |3+4i|=a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{25}=5L_3$

Avec le système $\left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=3 \\ a^2+b^2=5 \end{array}\right.$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve $2a^2=8 \Leftrightarrow a^2=4$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab=4 \Leftrightarrow ab=2$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe. Si $a=2$ alors $b=1$ et $Z_1=2+i$ et si $a=-2$ alors $b=-1$ et $Z_2=-2-i$

Deuxième méthode

$3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\left\{\begin{array}{c} a^2-b^2=3 \\ 2ab=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a^2-(\frac{2}{a})^2=3 \\ b=\frac{2}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a^2-\frac{4}{a^2}=3 \\ b=\frac{2}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a^4-4=3a^2 \\ b=\frac{2}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a^4-3a^2-4=0 \\ b=\frac{2}{a} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A^2-3A-4=0 \\ b=\frac{2}{a} \end{array}\right.$$

Les solutions de $A^2-3A-4=0$ sont $A_1=-1<0$ et $A_2=4$, donc $a^2=4$,

Si $a=-2$ alors $b=\frac{2}{a}=-1$ et alors $Z_2=-2-i$, si $a=2$ alors $b=\frac{2}{a}=1$ et alors $Z_1=2+i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=-7-24i$

On pose $\quad Z=a+ib, \quad Z^2 \Leftrightarrow -7-24i=(a+ib)^2 \Leftrightarrow -7-24i=a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow L_1\left\{a^2-b^2=-7\right.$

$L_2\{2ab=-24$

On rajoute l'équation

$$\left|Z^2\right| \Leftrightarrow |3+4i|=a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{(-7)^2+(-24)^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}$$
$$=25L_3$$

Avec le système $\left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=-7 \\ a^2+b^2=25 \end{array}\right.$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve $2a^2=18 \Leftrightarrow a^2=9$, d'où l'on tire $b^2=16$. Les valeurs possibles de a sont ± 3 et les valeurs possibles de b sont ± 4, d'après l'équation $2ab=-24 \Leftrightarrow ab=-12$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.
Si $a=3$ alors $b=-4$ et $Z_1=3-4i$ et si $a=-3$ alors $b=4$ et $Z_2=-3+4i$
Deuxième méthode
$-7-24i=9-24i-16=(3-4i)^2$ et on retrouve le même résultat.
Troisième méthode
On reprend le système

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=-7 \\ 2ab=-24 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2-(\frac{-12}{a})^2=-7 \\ b=-\frac{12}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2-\frac{144}{a^2}=-7 \\ b=-\frac{12}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^4-144=-7a^2 \\ b=-\frac{12}{a} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^4+7a^2-144=0 \\ b=-\frac{12}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A^2+7A-144=0 \\ b=-\frac{12}{a} \end{array}\right.$$

Les solutions de $A^2+7A-144=0$ sont $A_1=-16<0$ et $A_2=9$, donc $a^2=9$,
Si $a=3$ alors $b=-\frac{12}{a}=-4$ et alors $Z_2=3-4i$, si $a=3$ alors $b=-\frac{12}{a}=-4$ et alors $Z_1=-3+4i$.
On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=3-4i=z_8$, on peut refaire comme précédemment mais on va prendre la méthode la plus simple

$$Z^2=3-4i=4-4i-1=(2-i)^2$$

Il y a deux solutions

$$Z_1=2-i \quad \text{et} \quad Z_2=-2+i$$

On cherche les complexes Z tels que $Z^2=z_9=24-10i$
Là encore, on va aller au plus simple

$$24-10i=25-10i-1=(5-i)^2$$

Donc il y a deux solutions

$$Z_1=5-i \quad \text{et} \quad Z_2=-5+i$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose $Z=a+ib$,

$$Z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=(a+ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

On rajoute l'équation

$$\left|Z^2\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1L_3$$

Avec le système $\left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'après l'équation $2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{2}}{4}$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.
Si $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
Et si $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Admet deux solutions $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $Z_4 = -e^{i\frac{\pi}{8}} = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

2. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On pose $Z = a + ib$,

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow L_1 \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ L_2 \\ 2ab = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$\left|Z^2\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, d'après l'équation $2ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{3}}{4}$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.
Si $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
Et si $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Admet deux solutions $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $Z_4 = -e^{i\frac{\pi}{12}} = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2$$

$$z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$$

2. $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(5i+14))^2 - 4 \times 2(5i+12) \\ &= (-25 + 140i + 196) - 40i - 96 = 75 + 100i \\ &= 25(3+4i) \\ &= 5^2(3+4i) \end{aligned}$$

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2 = 5 - 4i \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases}$$

En faisant $L_1 + L_3$ on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$
En faisant $L_3 - L_2$ on trouve que $2b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$
D'après $L_2 a$ et b sont de même signe donc $a + ib = 2 + i$ ou $a + ib = -2 - i$
Autre méthode $3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2+i)^2$
et alors

$$\Delta = 5^2(2+i)^2 = (10+5i)^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{5i + 14 - (10+5i)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$z_1 = \frac{5i + 14 + (10+5i)}{2} = \frac{24 + 10i}{2} = 12 + 5i$$

3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

$$\Delta = 3 + 4i = (2+i)^2$$
$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i = 1 - i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - ij$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i = -1 + i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + ij^2$$

4. $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$

$$\Delta = (1+2i)^2 - 4(i-1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$
$$z_1 = \frac{1+2i-1}{2} = i$$
$$z_2 = \frac{1+2i+1}{2} = 1 + i$$

5. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$

   Le discriminant vaut

$$\Delta = (-(3+4i))^2 - 4(-1+5i) = 9 + 24i - 16 + 4 - 20i = -3 - 4i = (1-2i)^2$$

   Il y a deux solutions

$$z_1 = \frac{3+4i-(1-2i)}{2} = 2 + 3i$$
$$z_2 = \frac{3+4i+1-2i}{2} = 2 + i$$

6. $4z^2 - 2z + 1 = 0$

   Soit on résout «normalement», soit on ruse, rusons

$$4z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$$

   Avec $Z = -2z$. Les solutions de $Z^2 + Z + 1 = 0$ sont connues (et puis on vient de les revoir dans 1°))

$$Z_1 = j \quad \text{et} \quad Z_2 = j^2$$

   Par conséquent

$$z_1 = -\frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2}j^2$$

7. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

   On pose $Z = z^2, Z^2 + 10Z + 169 = 0$ a pour discriminant

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2 \times 13)^2 = (10-26)(10+26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2$$
$$Z_1 = \frac{-10+24i}{2} = -5 + 12i$$
$$Z_2 = \frac{-10-24i}{2} = -5 - 12i$$

   On cherche $z = a + ib$ tel que

$z^2 = Z_1 \Leftrightarrow (a+ib)^2 = -5+12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -5+12i$

$a^2 - b^2 = -5$

$2ab = 12$

$\Leftrightarrow L_1$

L_2

L_3

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a \\ a^2+b^2 = \sqrt{(-5)^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \end{array} \right.$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3, on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$,
En faisant la différence de L_3 et de L_1, on trouve que $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$,
D'après L_2, a et b sont de même signe donc $z^2 = Z_1$ a deux solutions

$$z_1 = 2+3i \quad \text{et} \quad z_2 = -2-3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2 = z^2$ ou dire que $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\overline{z_1} = 2-3i$ et $\overline{z_2} = -2+3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4 , il n'y en a pas plus, on les a toutes.

8. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$

   On peut faire comme dans le 7°), mais rusons :

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z^2}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - j\right]\left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - j^2\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - j^4\right]\left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - j^2\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - j\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + j\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(z - \sqrt{2}j^2\right)\left(z + \sqrt{2}j^2\right)(z - \sqrt{2}j)(z + \sqrt{2}j) = 0$$

   Les solutions sont

$$\left\{\sqrt{2}j^2, -\sqrt{2}j^2, \sqrt{2}j, -\sqrt{2}j\right\}$$

9. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$

   On pose $X = x^2$

$$X^2 - 30X + 289 = 0$$
$$\Delta = 30^2 - 4 \times 289 = 900 - 1156 = -256 = -16^2 = (16i)^2$$
$$X_1 = \frac{30-16i}{2} = 15 - 8i$$
$$X_2 = 15 + 8i$$

   On cherche x tel que $x^2 = 15 - 8i = 16 - 8i - 1 = (4-i)^2$
   Il y a donc deux solutions $x_1 = 4 - i$ et $x_2 = -(4-i) = -4+i$.
   De même on cherche x tel que $x^2 = 15 + 8i = 16 + 8i - 1 = (4+i)^2$
   Il y a donc deux solutions $x_3 = 4 + i$ et $x_4 = -(4+i) = -4-i$.
   Les solutions sont

$$\{4-i, -4+i, 4+i, -4-i\}$$

10. $x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0$

    Il faudrait trouver des solutions (réelles ou complexes).
    $x=1$ est solution évidente, mais ensuite cela ne vient pas, mais en regardant mieux on s'aperçoit que 4 premiers termes ressemblent fort au développement de $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ donc

$$x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0 \Leftrightarrow (x+1)^4-1-15=0 \Leftrightarrow (x+1)^4=16$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |(x+1)^4|=16 \\ \arg((x+1)^4)=\arg(16)+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|^4=2^4 \\ 4\arg(x+1)=0+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|=2 \\ \arg(x+1)=\frac{2k\pi}{4}, \quad k\in\{0,1,2,3\}\end{cases} \Leftrightarrow x_k+1=2e^{\frac{ik\pi}{2}},$$
$$k\in\{0,1,2,3\} \Leftrightarrow x_k=-1+2e^{\frac{ik\pi}{2}}, \quad k\in\{0,1,2,3\}$$
$$x_0=-1+2=1; x_1=-1+2e^{i\frac{\pi}{2}}=-1+2i;$$
$$x_2=-1+2e^{i\pi}=-1-2=-3; x_3=-1+2e^{\frac{3i\pi}{2}}=-1-2i$$

    Sont les solutions.

11. $z^3+3z-2i=0$

    On voit que i est une solution évidente (car $i^3+3i-2i=0$) donc on peut mettre $z-i$ en facteur.

$$z^3+3z-2i=(z-i)\left(az^2+bz+c\right) \Leftrightarrow z^3+3z-2i=az^3+(-ia+b)z^2+(-ib+c)z-ic$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -ia+b=0 \\ -ib+c=3 \\ -ic=-2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=ia=i \\ c=3+ib=2 \\ c=2 \end{cases}$$
$$z^3+3z-2i=(z-i)\left(z^2+iz+2\right)$$

    Le discriminant de z^2+iz+2 est $\Delta=i^2-4\times 2=-9=(3i)^2$
    Il y a deux solutions

$$z=\frac{-i-3i}{2}=-2i \quad \text{et} \quad z=\frac{-i+3i}{2}=i$$

    Il y a donc deux solutions, $z_1=i$ et $z_2=-2i$.

12.
$$\Delta=(1+a)^2(1+i)^2-4\left(1+a^2\right)i=\left(1+2a+a^2\right)(1+2i-1)-4i-4ia^2$$
$$=2i+4ia+2ia^2-4i-4ia^2=-2i+4ia-2ia^2=-2i\left(1-2a+a^2\right)$$
$$=(1-i)^2(1-a)^2=((1-i)(1-a))^2$$
$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)-(1-i)(1-a)}{2}=\frac{1+i+a+ia-(1-a-i+ia)}{2}=a+i$$
$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)+(1-i)(1-a)}{2}=\frac{1+i+a+ia+1-a-i+ia}{2}=1+ia$$

13. $\Delta=(1-5i)^2-4i(6i-2)=1-25-10i+24+8i=-2i$

    Il faut trouver δ tel que $\Delta=\delta^2$
    Première méthode :
    $-2i=1-2i-1=(1-i)^2$ c'est une identité remarquable. Donc $\delta_1=1-i$ ou $\delta_2=-1+i$ Deuxième méthode

On pose $\delta = a + ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -2i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -2i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = \left|\delta^2\right| \Leftrightarrow |-2i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2 = a^2 + b^2$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = -2 \Leftrightarrow ab = -1$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.
Si $a = 1$ alors $b = -1$ et $\delta = 1 - i$ et si $a = -1$ alors $b = 1$ et $\delta = -1 + i$. Ce sont bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.
Troisième méthode
$\Delta = -2i = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, donc les racines deuxièmes de Δ sont $\delta = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$ et $\delta = -\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = 1 - i$.
Pour résoudre $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$, on n'a besoin que d'une racine deuxième, on prend, par exemple $\delta = 1 - i$.
Les deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1-5i) - (1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = \frac{-1+3i}{i} = \frac{(-1+3i)(-i)}{i(-i)} = 3 + i$$
$$z_2 = \frac{-(1-5i) + (1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

14.
$$\begin{aligned}\Delta &= (-(3+i))^2 - 4(1+i)(-6+4i) = (3+i)^2 - 4(-6+4i-6i-4) \\ &= 9 - 1 + 6i - 4(-10-2i) = 8 + 6i + 40 + 8i = 48 + 14i\end{aligned}$$

On pose $\quad \delta = a + ib, \quad \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 48 + 14i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow 48 + 14i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases}$

On rajoute l'équation

$$\begin{aligned}|\Delta| = \left|\delta^2\right| &\Leftrightarrow ||48+14i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2|24+7i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{24^2 + 7^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \\ &= 2\sqrt{576 + 49} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{625} = 2 \times 25 = 50\end{aligned}$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 98 \Leftrightarrow a^2 = 49$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 7 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = 14 \Leftrightarrow ab = 7$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.
Si $a = 7$ alors $b = 1$ et $\delta = 7 + i$ et si $a = -7$ alors $b = -1$ et $\delta = -7 - i$
Deuxième méthode
$\Delta = 48 + 14i = 49 + 2 \times 7i - 1 = (7+i)^2$ donc $\delta = 7 + i$ ou $\delta = -7 - i$.

Troisième méthode
On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{7}{a}\right)^2 = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{49}{a^2} = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 49 = 48a^2 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^4 - 48a^2 - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 48A - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 - 48A - 49 = 0$ est $\Delta' = 48^2 + 4 \times 49 = 2500 = 50^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{48-50}{2} = -1$ et $A_2 = \frac{48+50}{2} = 49$, $A_1 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -1$, par contre $a^2 = 49$ admet deux solutions $a = -7$ et $a = 7$. Si $a = -7$ alors $b = \frac{7}{a} = -1$ et si $a = 7$ alors $b = \frac{7}{a} = 1$, on retrouve les mêmes solutions.
Les solutions de $(1+i)z^2 - (3+i)z - 6 + 4i = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(3+i) - (7+i)}{2(1+i)} = -\frac{4}{2(1+i)} = -\frac{2}{1+i} = -\frac{2(1-i)}{1^2 + 1^2} = -1 + i$$
$$z_2 = \frac{(3+i) + (7+i)}{2(1+i)} = \frac{10+2i}{2(1+i)} = \frac{5+i}{1+i} = \frac{(5+i)(1-i)}{1^2 + 1^2} = \frac{5 - 5i + i + 1}{1^2 + 1^2} = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i$$

15.

$$\Delta = (-(9+3i))^2 - 4(1+2i)(-5i+10) = \left(3(3+i)^2\right) - 4(-5i+10+10+20i)$$
$$= 9(9-1+6i) - 4(-25) = 9(8+6i) - 4(20+15i) = 72+54i-80-60i$$
$$= -8-6i$$

On pose $\delta = a+ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8-6i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -8-6i = a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ 2ab=-6 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = \left|\delta^2\right| \Leftrightarrow |-8-6i| = a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{(-8)^2+(-6)^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{64+36} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système $\begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$, d'où l'on tire $b^2 = 9$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 3, d'après l'équation $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -3$ et $\delta = 1-3i$ et si $a = -1$ alors $b = 3$ et $\delta = -1+3i$

Deuxième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ 2ab=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\left(\frac{-3}{a}\right)^2=-8 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\frac{9}{a^2}=-8 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^4-9=-8a^2 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4+8a^2-9=0 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2+8A-9=0 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2+8A-9=0$ est

$\Delta' = 8^2+4\times 9 = 100 = 10^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{-8-10}{2} = -9$ et $A_2 = \frac{-8+10}{2} = 1, A_2 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -9$, par contre $a^2 = 1$ admet deux solutions $a = -1$ et $a = 1$.

Si $a = -1$ alors $b = \frac{-3}{a} = 3$ et si $a = 1$ alors $b = \frac{-3}{a} = -1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta = -8-6i = 1-6i-9 = (1-3i)^2$ donc $\delta = 1-3i$ et $\delta = -1+3i$

Les solutions de $(1+2i)z^2-(9+3i)z-5i+10=0$ sont :

$$z_1 = \frac{(9+3i)-(1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{8+6i}{2(1+2i)} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{4-8i+3i+6}{10} = 2-i$$
$$z_2 = \frac{(9+3i)+(1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{10}{2(1+2i)} = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{1^2+2^2} = 1-2i$$

16. $\Delta = \left(-(6i+2)^2\right) - 4(1+3i)(11i-23) = (6i+2)^2 - 4(11i-23-33-69i) = -36+24i+4-4(-56-58i) = -32+24i+224+232i = 192+256i = 64(3+4i)$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de $3+4i$, ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de $192+256i$.

On pose $\delta = a+ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 3+4i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow 3+4i = a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=4 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = \left|\delta^2\right| \Leftrightarrow |3+4i| = a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{25} = 5$

Avec le système $\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $\delta = 2+i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $\delta = -2-i$

Donc $(2+i)^2 = 3+4i$ entraine que $\Delta = 64(3+4i) = 8^2(2+i)^2 = (8(2+i))^2 = (16+8i)^2$

Deuxième méthode

$3+4i = 4+4i-1 = (2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\frac{4}{a^2}=3 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-4=3a^2 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-3a^2-4=0 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2-3A-4=0 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2-3A-4=0$ sont $A_1=-1<0$ et $A_2=4$, donc $a^2=4$,
Si $a=-2$ alors $b=\frac{2}{a}=-1$ et alors $\delta=-2-i$, si $a=2$ alors $b=\frac{2}{a}=1$ et alors $\delta=2+i$.
Les solutions de $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23=0$ sont

$$z_1=\frac{6i+2-(16+8i)}{2(1+3i)}=\frac{-14-2i}{2(1+3i)}=\frac{-7-i}{1+3i}=\frac{(-7-i)(1-3i)}{1^2+3^2}=\frac{-7+21i-i-3}{10}=-1+2i$$
$$z_2=\frac{6i+2+(16+8i)}{2(1+3i)}=\frac{18+14i}{2(1+3i)}=\frac{9+7i}{1+3i}=\frac{(9+7i)(1-3i)}{1^2+3^2}=\frac{9-27i+7i+21}{10}=3-2i$$

Correction de l'exercice 17 ▲

$$\Delta=(-i)^2+4(1+i)=4+4i-1=(2+i)^2$$

Les solutions de $Z^2-iZ-1-i=0$ sont

$$Z_1=\frac{i+2+i}{2}=1+i$$
$$Z_2=\frac{i-(2+i)}{2}=-1$$

Les solutions de $z^6-iz^3-1-i=0$ vérifient

$$z^3=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^3|=\sqrt{2}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.\Leftrightarrow z\in\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}};2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}$$

Ou

$$z^3=-1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^3|=1\\ \arg(z^3)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^3=1\\ 3\arg(z)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0=e^{\frac{i\pi}{3}};\quad z_1=e^{\frac{3i\pi}{3}}=e^{i\pi}=-1;\quad z_2=e^{\frac{5i\pi}{3}}=e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Finalement il y a six solutions

$$\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}};2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}};e^{\frac{i\pi}{3}};-1;e^{-\frac{i\pi}{3}}\right\}$$

Ecole supérieure d'agro-développement international

Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur Google Play et l'App Store.

Etudiez en musique ! Partagez votre musique préférée pour travailler, par mail à `a.gere@istom.fr`.

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

Cours et exercices rédigés par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).