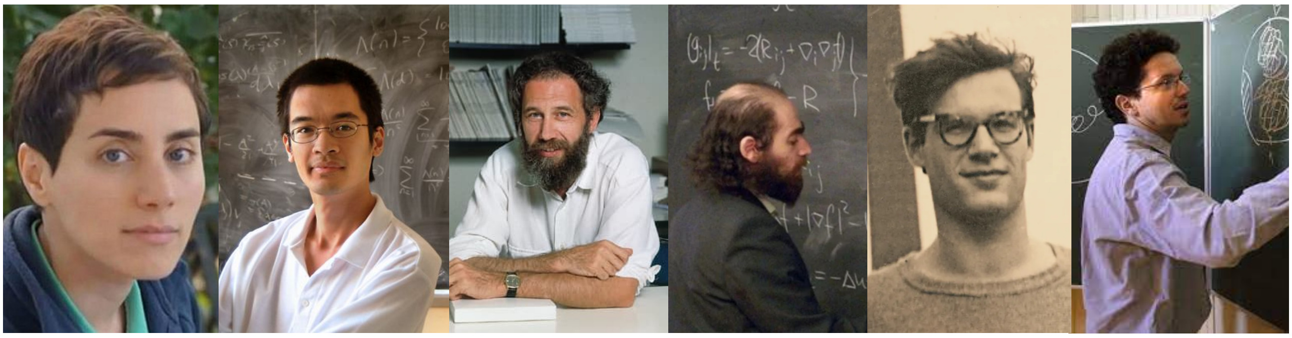
# Fonctions à une variable réelle

Antoine Géré

Année 2025 - 2026[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

## Table des matières



[1] version du 16 décembre 2025

# 1 Rappels

On rappelle les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les formules générales de dérivation. Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathcal{D}, f(x)$ est l'image de $x$ par $f$, c'est un réel. On note

$$\begin{aligned} f: \quad \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ existe } \}$$

On dit que $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de $f$. Pour déterminer $\mathcal{D}$ il suffit de savoir répondre à la question suivante :
Pour quelles valeurs de $x$, ai-je le droit de calculer $f(x)$ ? Ai-je le droit tout le temps (pas de contrainte), dans ces conditions $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ou existe-t-il des valeurs interdites et dans ces conditions le domaine de définition de $f$ est une partie de $\mathbb{R}$ simplement.

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

- Si, pour tout $x$ de $I, f'(x) \geq 0$ alors $f$ est croissante sur $I$.
- Si, pour tout $x$ de $I, f'(x) \leq 0$ alors $f$ est décroissante sur $I$.
- Si , pour tout $x$ de $I, f'(x) = 0$ alors $f$ est constante sur $I$.

Méthode : Détermination des variations d'une fonction

1. Calculer la dérivée de la fonction
2. Déterminer le signe de la dérivée
3. Dans un tableau de variations, regrouper le signe de la dérivée, les variations de la fonction et les valeurs d'images importantes.
4. Tracer la courbe de la fonction.

Une fonction $f$ est :

- une fonction *paire* si $f(-x) = f(x)$,
- une fonction *impaire* si $f(-x) = -f(x)$,

pour tout $x$ de son ensemble de définition.

| Opération | Dérivée |
|---|---|
| $f+g$ | $f'+g'$ |
| $f \cdot g$ | $f' \cdot g + f \cdot g'$ |
| $\dfrac{f}{g}$ | $\dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ |
| $g \circ f$ | $f' \times g' \circ f$ |
| $\dfrac{1}{u}$ | $-\dfrac{u'}{u^2}$ |
| $u^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$ | $\alpha u' u^{\alpha-1}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\ln(u)$ | $\dfrac{u'}{u}$ |
| $\exp(u)$ | $u' \exp(u)$ |
| $\cos(u)$ | $-u' \sin(u)$ |
| $\sin(u)$ | $u' \cos(u)$ |

Voir les exercices 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 et 28.

# 2 Prolongement par continuité

Il arrive qu'une fonction soit définie partout sauf en un point, mais qu'on extrapole par passage à la limite la valeur plausible en ce point. On réalise alors un prolongement par continuité. Prenons un exemple : soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par

$$f(x) = \sin(x)/x$$

Alors la fonction $f$ n'est pas définie en $0$ , mais d'après une limite classique, la limite de $f$ en $0$ est $1$ . Posons $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \sin x / x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Alors $g$ prolonge $f$ (ces deux fonctions sont égales sur l'ensemble de définition de $f$ ) et est continue en 0. On appelle $g$ le prolongement par continuité de $f$ en $0$ .

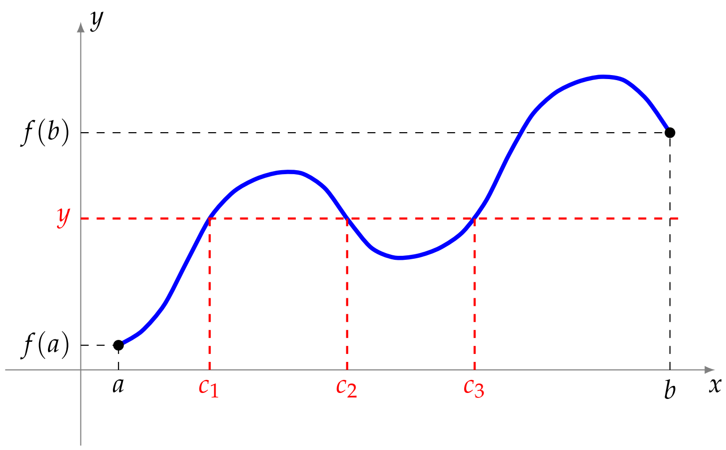
Voir les exercices 11 et 10.

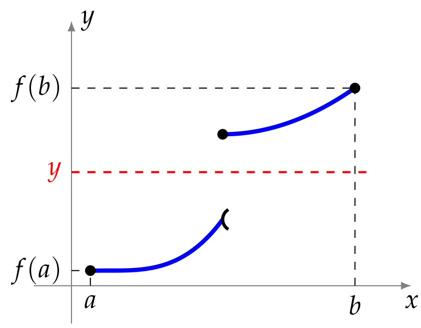
## 3 Le théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1** (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

*Pour tout réel $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$,*
*il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel $c$ n'est pas nécessairement unique. De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).




Voir exercice 16

## 4 Théorème de Rolle

**Théorème 2** (Théorème de Rolle)**.**
*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

- *$f$ est continue sur $[a, b]$,*
- *$f$ est dérivable sur $]a, b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

*Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = 0$$

Voir exercice 17

## 5 Théorème des accroissements finis

**Théorème 3** (Théorème des accroissements finis).
*Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que*

- *$f$ est continue sur $[a,b]$,*
- *$f$ est dérivable sur $]a,b[$.*

*Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Voir exercice 18

## 6 Branches infinies

Étant donnée une fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'étude de ses branches infinies a pour objectif de comprendre en détails le comportement de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

### 6.1 Premier cas

Cette limite est finie :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

On conclue alors que la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ et l'étude est terminée.

*Exemples :*

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = xe^{-x}, \quad h(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+3}$$

## 6.2 Second cas

Cette limite est infinie :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

La fonction $f$ n'admet alors pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ et l'on doit poursuivre l'étude pour étudier de plus près le comportement de $f(x)$ autour de $+\infty$. Intuitivement, le calcul de

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

nous dit dans ce cas là que $f(x)$ grandit quand $x$ grandit. Les questions qui se pose à ce moment là sont : A quelle vitesse grandit $f(x)$ ? Grandit-elle plus vite ou moins vite que $x$ ?

Là encore, un calcul de limite va pouvoir nous aider à répondre : pour comparer la croissance de $f(x)$ et celle de $x$, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Le comportement de la fonction $f$ autour de $+\infty$ dépendra alors du type de réponse obtenu mais contrairement à tout à l'heure, on distingue ici trois types de réponses possibles (et non plus deux).

1. Soit
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$
Dans ce cas, $f(x)$ grandit moins vite que $x$. On dit que la courbe de $f$ admet une branche parabolique d'axe ( $Ox$ ).

   *Exemples :*
$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}-3}.$$

2. Soit
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$
Dans ce cas, $f(x)$ grandit plus vite que $x$. On dit que la courbe de $f$ admet une branche parabolique d'axe $(Oy)$.

   *Exemples :*
$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}$$

3. Soit
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$
. Dans ce cas, la vitesse de croissance de $f(x)$ est comparable à celle de $ax$ quand $x$ grandit. Pour effectuer cette comparaison, on étudie une dernière limite : celle de la différence $f(x) - ax$ et on distingue deux cas :

   (a) Soit
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$$
   et la courbe de $f$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique.

   *Exemples :*
$$f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+4}, \quad g(x) = x\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1}\right), \quad h(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

   (b) Soit
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$$
   et la courbe de $f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.

   *Exemples :*
$$f(x) = x + \sqrt{x}, \quad g(x) = x\left(\frac{2\ln x + 1}{\ln x}\right).$$

Voir exercice 20

# 7 Exercices

## Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

1. $\dfrac{16x^2-2x+8}{x^2+5x+6}$
2. $\sqrt{x^2+3x-10}$
3. $\dfrac{x+6}{x^3+5x}$
4. $\sqrt{4x-x^3}$
5. $\sqrt{3x-2}$
6. $\dfrac{8x^2-5x+3}{x^2-5x+6}$
7. $\sqrt{x^2-3x-18}$
8. $\dfrac{4x^2-5x+15}{x^3+6x}$
9. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^3}}$
10. $\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{5x-1}}$
11. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{2x-1}}$
12. $\dfrac{x^2+x-1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$
13. $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x^2-3x-9}$
14. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2-3x-10}$
15. $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{x^2-2x-3}$
16. $\dfrac{x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$
17. $\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4x-1}}$
18. $\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x+1}$
19. $\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{8-x^3}$
20. $\sqrt{\dfrac{2-5x}{x^2-6x+5}}$

Correction ▼ [11.0092]

## Exercice 2 Fonctions polynôme

Calculer la dérivée des fonctions polynômes suivantes.

1. $f(x)=x^2+2$
2. $f(x)=2x^2+3x-5$
3. $f(x)=x^2+3x-1$
4. $f(x)=x-1$
5. $f(x)=\dfrac{3}{2}-x$
6. $f(x)=\dfrac{x}{5}$
7. $f(x)=-2x^4+\dfrac{5}{3}x^3$
8. $f(x)=12x^{13}+3x^2-5x+\pi$
9. $f(x)=-5x^2+2x+\sqrt{2}$
10. $f(x)=\dfrac{-5x^2}{3}+3$
11. $f(x)=3x-2x^2-\dfrac{2}{3}$
12. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x-1$

Correction ▼ [11.0093]

## Exercice 3 Puissances négatives

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{-2}{x^5}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2x^4}$
4. $f(x) = 3x^{-5}$
5. $f(x) = \dfrac{x^{-4}}{8}$
6. $f(x) = -10x^{-1}$

Correction ▼ [11.0094]

## Exercice 4 Fonctions quelconques

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2 - 1$
3. $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
4. $f(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{5}{2}x^2$
5. $f(x) = -\dfrac{1}{2x} - x + \sqrt{3}$
6. $f(x) = \dfrac{5}{x} - \pi x + 1$

Correction ▼ [11.0095]

## Exercice 5 Fonctions produit

Calculer la dérivée des fonctions produit suivantes

1. $f(x) = x^2\sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}(x+1)$
3. $f(x) = (2x+1)(x-3)$
4. $f(x) = (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$
5. $f(x) = (1-2x)\left(\dfrac{x^2}{3}+x\right)$
6. $f(x) = \left(2+x+3x^2\right)(1-x)$
7. $f(x) = \left(x^3-3\right)\left(x^2-3x+1\right)$
8. $f(x) = (x-1)(x+1)(2x-3)$
9. $f(x) = (1+x)^2$
10. $f(x) = (x-3)^2$
11. $f(x) = (2x-4)^2$
12. $f(x) = (1-x)^3$

Correction ▼ [11.0096]

## Exercice 6 Fonctions quotient

Calculer la dérivée des fonctions quotient suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{5}{2x}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$

5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$
6. $f(x)=\dfrac{2x+1}{2-3x}$
7. $f(x)=\dfrac{2x+5}{2x}$
8. $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+3}$
9. $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$
10. $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{2x^2-4}$
11. $f(x)=\dfrac{3-x}{1-x}$
12. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

Correction ▼ [11.0097]

## Exercice 7

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 2} x^2+2x+3$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+2x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2+2x+3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Correction ▼ [11.0098]

## Exercice 8

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-2x^3+x^2+x-1}{x^2+x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$
7. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}$
8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+12}-3}{x^2-9}$
9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2-x}{(x-3)^2}$

Correction ▼ [11.0099]

## Exercice 9

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} -3x\sqrt{x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-x+1}-x$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x+\sqrt{x^2+1}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-2x$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{4x^2+1}+2x-1$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-x$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x}+x$

9. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+3x-1}+3x-4$

Correction ▼ [11.0100]

---

## Exercice 10 Prolongement par continuité et limites usuelles

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier ?

1. $f(x) = \exp\left(-1/x^2\right)$ si $x \neq 0$
2. $g(x) = \exp(-1/x)$ si $x \neq 0$
3. $h(x) = \sin(x+1)\ln|1+x|$ si $x \neq -1$.

Correction ▼ [11.0013]

---

## Exercice 11 Prolongement par continuité

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}$$

Démontrer qu'on peut prolonger $f$ par continuité en $-\mathbf{1}$. Préciser la valeur prise en $-\mathbf{1}$ par ce prolongement.

Correction ▼ [11.0012]

---

## Exercice 12

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+6x+5$.

1. Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de $f$ et la droite $D$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 2$.

Correction ▼ [11.0101]

---

## Exercice 13

Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = 3x - 4x^3$$

Correction ▼ [11.0102]

---

## Exercice 14

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-4x-4}{x^2+2x+5}$.

1. Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées du point $A$, intersection entre la courbe représentative de $f$ et l'axe des abscisses.
3. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe représentative de $f$ au point $A$.

Correction ▼ [11.0103]

## Exercice 15

Etudier les variations sur $]-2;1[$ de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{-5x^2+4x-8}{x^2+x-2}$$

Correction ▼ [11.0104]

## Exercice 16 Combien de solutions ?

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

Correction ▼ [11.0014]

## Exercice 17

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, montrer que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Correction ▼ [11.0015]

## Exercice 18

1. Montrer que pour tout $x, y$ réels on a :

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Correction ▼ [11.0045]

## Exercice 19

Etudier l'existence et la nature des branches infines des graphes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
2. $f(x) = 2x\sqrt{x-3}$
3. $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x+1}$
4. $f(x) = \sqrt{x-1} - 2x + 1$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - x\sqrt{x} - 1}{x+1}$

Correction ▼ [11.0105]

## Exercice 20

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes, et tracer une allure de leur courbe représentative (on essaiera d'étudier les variations également quand c'est possible) :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$
3. $f_3(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$
4. $f_4(x) = \sqrt{x} + \ln x$
5. $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$
6. $f_6(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$

Correction ▼ [11.0077]

## Exercice 21

On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$. On appelle $\Gamma$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier la parité de $f$.
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer la fonction dérivée de $f$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de $f$.
5. Tracer la courbe représentative de $f$.

Correction ▼ [11.0001]

## Exercice 22

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, par

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

On note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1 .
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition. Que peut-on en déduire pour $\left(\mathcal{C}_f\right)$ ?
3. Déterminer trois réels $a, b$ et $c$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

.

4. En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour $\left(\mathcal{C}_f\right)$ en $+\infty$.
5. Calculer la fonction dérivée de $f$ et étudier son signe.
6. Dresser le tableau de variation de $f$.

7. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Correction ▼ [11.0001]

## Exercice 23

On donne la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 3}$$

, et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f$.
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de $\left(\mathcal{C}_f\right)$. Dans la suite de l'exercice, la fonction $f$ sera étudiée sur $[-1;1[\cup]1;+\infty[$.
3. Déterminer les limites en 1 et la limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\left(\mathcal{C}_f\right)$ ?
4. Calculer la fonction dérivée de $f$ et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de $f$.
6. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Correction ▼ [11.0003]

## Exercice 24

On donne la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$, et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes du domaine, en déduire l'existence d'une asymptote horizontale $(\Delta)$ pour $\left(\mathcal{C}_f\right)$.
3. Étudier les positions relatives de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et de $(\Delta)$.
4. Calculer la fonction dérivée de $f$ et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de $f$.
6. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Correction ▼ [11.0004]

## Exercice 25

On donne la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$$

et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) Justifier l'équivalence : $x \geqslant 3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 27$.
   (b) Calculer la fonction dérivée de $f$.
   (c) Étudier le signe de $f'$.
5. Dresser le tableau de variations de $f$.
6. Tracer la courbe représentative de $f$.

Correction ▼ [11.0005]

## Exercice 26

On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x$$

et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que $f$ est $2\pi$-périodique.
   (b) Montrer que $f$ est paire.
2. (a) Montrer que la fonction dérivée de $f$ s'écrit : $f'(x) = 2\sin x(1 - 2\cos x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'$ sur $[0; \pi]$.
3. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0; \pi]$.
4. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sur un intervalle de longueur $4\pi$.

Correction ▼ [11.0006]

## Exercice 27

On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$$

et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $f$ est définie ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $f$ est $2\pi$-périodique.

Pour la suite de l'exercice, on étudiera la fonction sur l'intervalle $]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

3. Déterminer les limites de $f$ en :
   (a) $-\frac{3\pi}{2}$ par valeurs supérieures,
   (b) $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures,
4. Calculer la fonction dérivée de $f$ et étudier son signe.

5. Dresser le tableau de variations de $f$

6. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sur $]-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}[$.

Correction ▼ [11.0007]

## Exercice 28

On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x - \sqrt{|x-1|}$ et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de $f$ sans valeur absolue sur $[1;\infty[$ et sur $]-\infty;1]$.
2. Étudier la dérivabilité de $f$ en 1 .
3. Étudier la fonction sur $]-\infty;1]$.
4. Étudier la fonction sur $[1;+\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Correction ▼ [11.0009]

## Exercice 29 Une dérivée ... troisième ?

On considère l'application $\varphi : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$, avec

$$\varphi : x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$$

1. Montrer que $\varphi$ est de classe $C^3$ sur $]0,+\infty[$. Calculer, pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[$,
$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$$
2. Étudier le sens de variation de $\varphi''$ et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de $\varphi'$, et montrer : $\forall x \in ]0,+\infty[$,
$$\varphi'(x) \geqslant e$$
3. Étudier les limites de $\varphi$ en $0^+$et en $+\infty$.
4. Résumer les informations précédentes dans un tableau de variations.
5. On admet que $2 < e < 3$ et que $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer que : $\forall x \in [3,+\infty[$,
$$\varphi(x) \geqslant ex$$

Correction ▼ [11.0087]

## Exercice 30 Des solutions mystérieuses, mais uniques

On s'intéresse aux équations de la forme $x^3 + mx + 1 = 0$, où $m$ est un réel positif fixé.

1. Cas $m = 1$.

(a) Montrer que l'équation $x^3+x+1=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Dans la suite de cet exercice, on note $\alpha$ l'unique solution réelle de $x^3+x+1=0$.

(b) Montrer que $-1<\alpha<0$.

2. Cas $m=3$.

Justifier que l'équation $x^3+3x+1=0$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement négative. Vous pouvez vous contenter d'une justification assez brève, inutile de répéter tous les arguments que vous avez donnés pour répondre à la question 1.

Dans la suite de cet exercice, on note $\beta$ l'unique solution réelle de $x^3+3x+1=0$.

3. Il est difficile de trouver une expression explicite de $\alpha$ et $\beta$ ; cependant, leur définition comme solutions d'équations nous donne indirectement des informations sur ces nombres. Dans cette question, on va chercher à exploiter ces informations pour comparer $\alpha$ et $\beta$.

   (a) Montrer que $\alpha^3+3\alpha+1<0$.

   (b) En déduire que $\alpha<\beta$.
   *Indication : utiliser la fonction* $g : x \mapsto x^3+3x+1$.

4. Exprimer $\alpha^5$ comme un polynôme de degré 2 en $\alpha$ (c'est-à-dire, trouver des coefficients $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha^5=a\alpha^2+b\alpha+c$ ).

Correction ▼ [11.0088]

## Exercice 31 Un peu de trigonométrie (mais pas trop)

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\tan(x)^2+\cos(x)$.

1. Quel est le domaine de définition de $f$ ?
2. Justifier que l'on peut limiter l'étude de $f$ à $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$.
3. Montrer que, pour tout $x\in D, f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.
4. Construire le tableau de variations de $f$ sur $D$, en y faisant figurer les limites appropriées (justifiez brièvement comment vous les obtenez).
5. Tracer la courbe de $f$ entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Correction ▼ [11.0089]

## Exercice 32 Prendre le problème à la racine

Soit

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{|x-1|}e^{1/x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

1. Quel est l'ensemble de définition $D_f$ de $f$ ?
2. Sur quels intervalles peut-on conclure directement à la dérivabilité de $f$ ? Sur chacun de ces intervalles, montrer que sa dérivée peut s'écrire sous la forme

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2+1}{2x^2(x-1)}f(x)$$

3. Vérifier que $f$ est continue en 1 , puis étudier sa dérivabilité en ce point.

4. Étude en 0.

   (a) Déterminer $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$. Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

5. Étude en l'infini.

   (a) Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

6. Résumer les résultats obtenus dans un tableau de variations, et représenter graphiquement $f$.

Correction ▼ [11.0090]

### Correction de l'exercice 1 ▲

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

---

### Correction de l'exercice 5 ▲

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si $x \to 0$, alors $-1/x^2 \to -\infty$. Puisque $\lim_{X\to-\infty} \exp(X) = 0$, on en déduit par le théorème de composition des limites que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi, on peut prolonger $f$ par continuité en $0$ en posant $f(0) = 0$.

2. Si $x \to 0^+$, le même raisonnement s'appliquer et $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Mais si $x \to 0^-$, alors $-1/x \to +\infty$. Puisque $\lim_{X\to+\infty} \exp(X) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$. Ainsi, on ne peut pas prolonger $g$ par continuité en $0$.

3. Par les théorèmes généraux, $h$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Par ailleurs, posant $u = x + 1$, on a

$$\lim_{x\to-1} h(x) = \lim_{u\to 0} \sin(u)\ln|u| = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \times u\ln|u| = 1 \times 0 = 0$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité $h$ en -1 en posant $h(-1) = 0$.

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

Le numérateur et le dénominateur s'annule tous les deux en $-1$, et donc on a une forme indéterminée lorsqu'on calcule la limite de $f$ en $-1$. Pour lever cette indétermination, on factorise le dénominateur en

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$$

pour trouver cette forme, on peut procéder par identification en écrivant

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 + ax + b\right).$$

On en déduit alors que, pour tout $x \neq -1$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Ainsi, $\lim_{x \to -1} f(x) = 1/3$ et on en déduit que l'on peut prolonger $f$ par continuité en -1 en posant $f(-1) = 1/3$

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

---

### Correction de l'exercice 15 ▲

---

### Correction de l'exercice 16 ▲

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On peut alors amorcer la discussion suivant les valeurs de $a$ :

- Si $a > -1$, puisque $f(x) \leq -1$ si $x \in ]-\infty, 2\ ]$, il n'y a pas de solutions à l'équation $f(x) = a$ dans cet intervalle. D'autre part, $f$ est continue strictement croissante sur $]2, +\infty[$, et $a \in ]f(2), \lim_{+\infty} f[ = ]-5, +\infty[$. Il y a donc une solution unique dans lintervalle $]2, +\infty[$ à l'équation $f(x) = \boldsymbol{a}$, et donc aussi une solution unique sur $\mathbb{R}$.

- Si $\boldsymbol{a = -1}$, on fait le même raisonnement, en remarquant quill n'y a pas de solutions dans $]-\infty, 0[$ni dans $]0, 2$. En revanche, on a aussi $f(0) = -1$. L'équation $f(x) = -1$ admet donc 2 solutions.

- Si $a \in ]-5, -1[$, alors par le même argument que précédemment (stricte monotonie et valeur ou limite aux bornes), on constate que l'équation $f(x) = \boldsymbol{a}$ admet une solution unique sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[ ]0, , 2[$ et $]2, +\infty[$. Il y a donc trois solutions à l'équation $f(x) = a$ sur $\mathbb{R}$.

- Si $\boldsymbol{a < -5}$, alors il ne peut pas y avoir de solutions dans lintervalle $[0, +\infty[$ et puisque $f$ est strictement croissante, continue sur $]-\infty, 0\ [$ avec $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $f(0) - 1$, l'équation $f(x) = a$ admet une solution unique dans $]-\infty, 0[$.

- Enfin, si $\boldsymbol{a = -5}$, on trouve deux solutions, l'une dans $]\ -\infty, 0\ [$, et aussi 2 .

---

### Correction de l'exercice 17 ▲

---

### Correction de l'exercice 18 ▲

1. Pour $x \neq y$. La fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$ si $x<y$ (ou sur $[y,x]$ si $y<x$ ). Il existe $c \in ]x,y[$ (ou $]y,x[$ ) tel que

$$\sin(x) = \sin(y) + (x-y)\cos(c)$$

Donc

$$\sin(x) - \sin(y) = (x-y)\cos(c)$$

On prend la valeur absolue

$$|\sin(x) - \sin(y)| = |x-y| \times |\cos(c)|$$

Puis comme $|\cos(c)| \leq 1$ on a

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$$

Pour $x=y$ l'inégalité est triviale.

2. La fonction $f : x \to \ln(1+x)$ est continue est dérivable sur $\mathbb{R}^+$donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Par conséquent il existe $c \in ]0,x[$ tel que

$$\ln(1+x) = \ln(1) + (x+1-1) \times \frac{1}{1+c} = \frac{x}{1+c}$$
$$0<c<x \Leftrightarrow 1<1+c<1+x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x$$

Car $x>0$
On en déduit que

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

---

## Correction de l'exercice 19 ▲

---

## Correction de l'exercice 20 ▲

1. La fonction $f_1$ et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En $0^+$, la limite de $f_1$ est égale à 0 puisque le numérateur tend vers 0 (rappelons que $x\ln(x)$ a pour limite 0 en 0 par croissance comparée) et le dénominateur vers 1 , donc il n'y a pas d'asymptote verticale. Ensuite,

$$f_1(x) = \frac{x+\ln x}{1+\frac{1}{x}}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{f_1(x)}{x} = \frac{1+\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Il faut donc calculer

$$f(x) - x = \frac{x + \ln x - x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\ln x - 1}{1 + \frac{1}{x}}$$

On a donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = +\infty$$

la courbe de $f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y = x$. La dérivée de cette fonction vaut

$$f_1'(x) = \frac{(2x + \ln(x) + 1)(x+1) - x^2 - x\ln(x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 3x + 1 + \ln(x)}{(x+1)^2}$$

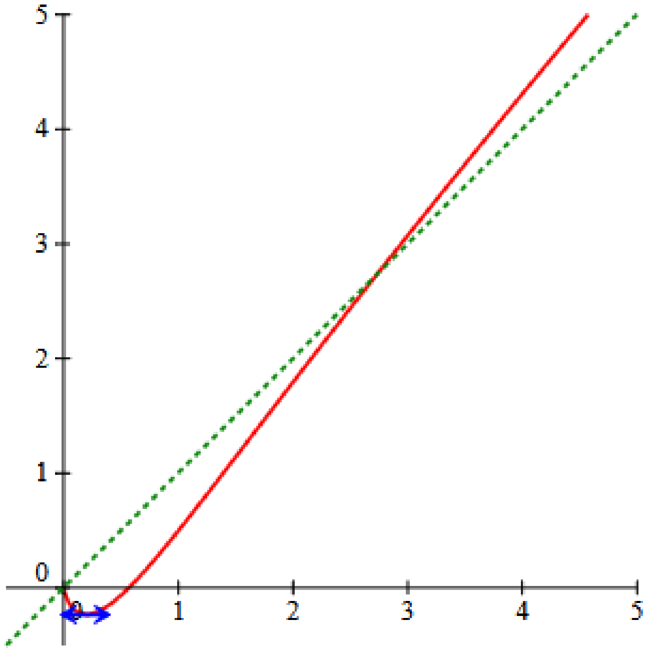
Pas vraiment évident à étudier, on peut toutefois noter $g$ le numérateur et constater que

$$g'(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x}$$

Le discriminant du numérateur vaut $\Delta = 8 - 8 = 1$, il s'annule pour deux valeurs négatives :

$$x_1 = \frac{-3-1}{4} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$$

On en déduit que $g'(x)$ est positif sur $\mathcal{D}_f$, donc $g$ y est croissante. Comme la limite de $g$ en 0 vaut $-\infty$ et que $g(1) = 4$, la fonction $g$ (et donc la fonction $f'$ ) s'annule une seule fois, entre 0 et 1 . La fonction $f_1$ admettra à cet endroite un minimum. Voici l'allure de la courbe :




2. Un classique : $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \backslash \{-1;1\}$. En $-1$ , le numérateur tend vers $-4$ et le dénominateur vers 0, il y a donc des limites infinies et une asymptote verticale d'équation $x = -1$. Par contre, en 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0, on est obligés de factoriser de chaque côté. Pour le numérateur, remarquons que

$$x^3 - 2x^2 + x = x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2$$

donc pour $x \neq 1$,

$$f_2(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$$

, qui a pour limite 0 en 1. Pas de deuxième asymptote verticale donc. Pour les infinis, on peut utiliser le quotient des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty \quad \text{et de même} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Reste à calculer

$$f_2(x) - x = \frac{x^3 - 2x^2 + x - x^3 + x}{x^2 - 1} = \frac{-2x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

qui a pour limite $-2$ en $+\infty$. Conclusion de tous ces calculs : la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ (où les calculs sont les mêmes). Pour le calcul de la dérivée il vaut évidemment mieux partir de

$$f_2(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$$

pour obtenir

$$f_2'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, la dérivée s'annule pour

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et pour} \quad x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$$

On peut aller jusqu'à calculer

$$f_2\left(x_1\right) = \frac{(-1-\sqrt{2})(-2-\sqrt{2})}{-\sqrt{2}} = \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 3$$

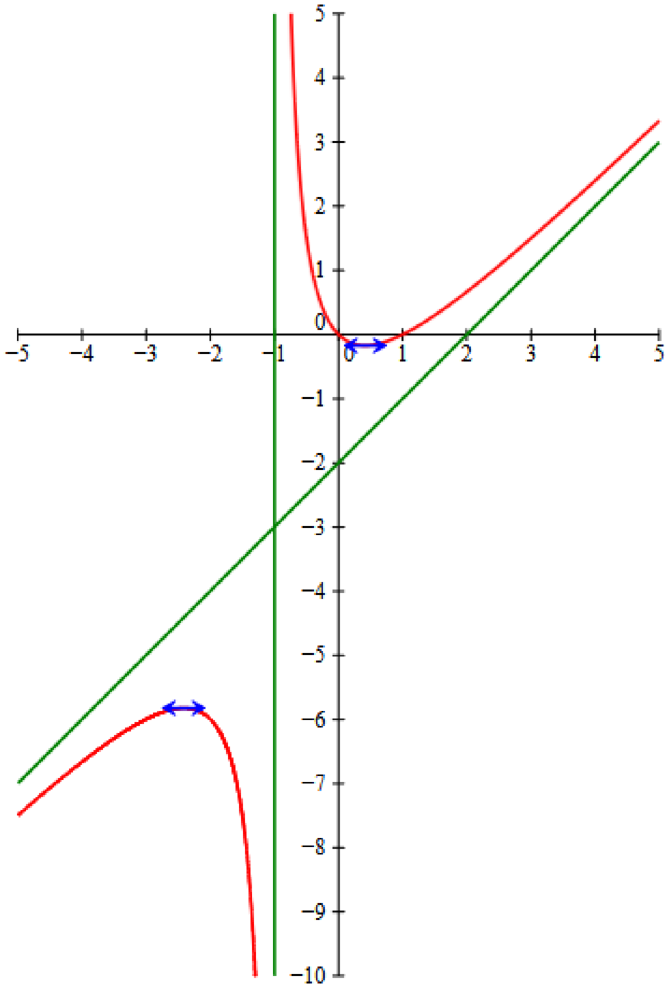
et

$$f_2\left(x_2\right) = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 3$$

Ce qui permet de dresser le magnifique tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}-1$ | | $-1$ | | $\sqrt{2}-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_2(x)$ | | | $-2\sqrt{2}-3$ | | $\Vert$ $+\infty$ | | | | $+\infty$ |
| | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| | $-\infty$ | | | | $-\infty$ $\Vert$ | | $2\sqrt{2}-3$ | | |

Et la courbe qui va avec :




3. La fonction $f_3$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle est strictement positive. Il suffit donc de regarder ce qui se passe aux infinis, et on peut commencer par constater que $f_3$ est paire. La limite en $+\infty$ de $f_3$ est $+\infty$ et de plus

$$f_3(x) = \ln\left(e^x\left(1+e^{-2x}\right)\right) = x + \ln\left(1+e^{-2x}\right)$$

donc

$$\frac{f_3(x)}{x} = 1 + \frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}$$

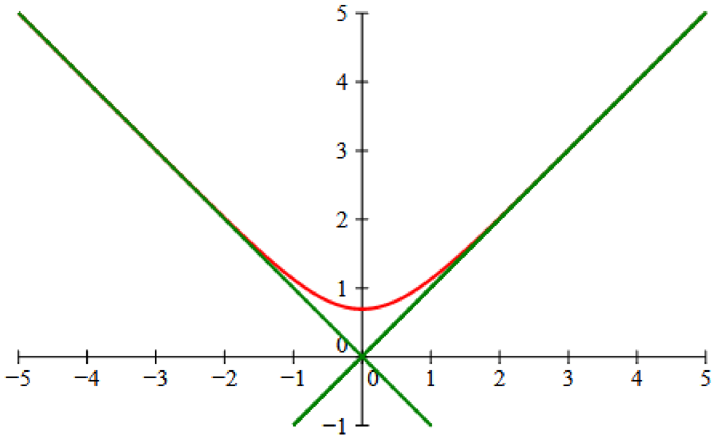
qui a pour limite 1 quand $x$ tend vers $+\infty$. Enfin,

$$f(x) - x = \ln\left(1+e^{-2x}\right)$$

qui tend vers 0 , donc la droite d'équation $y = x$ est aymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$. On calcule

$$f_3'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

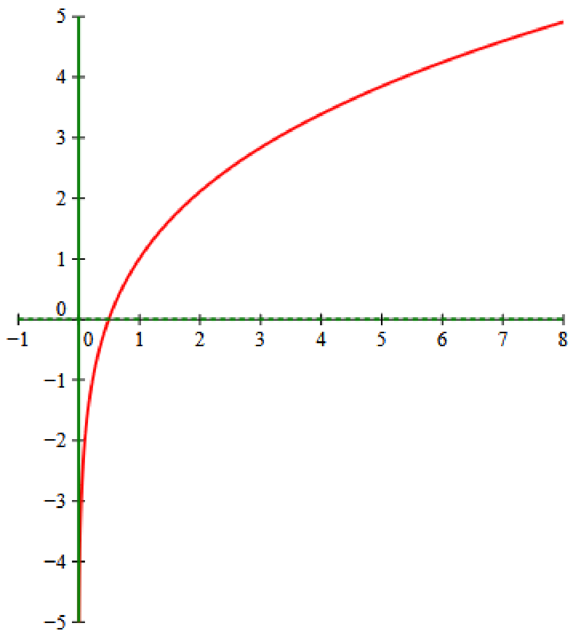
qui est positive sur $[0;+\infty[$ (et négative sur $]-\infty;0]$, ce qui est cohérent avec la parité). Il y a donc un minimum en 0 de valeur $f_3(0) = \ln(2)$.




4. Le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$ et il y a une asymptote verticale en 0 (limite $-\infty$ ). De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \frac{f_4(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_4(x)}{x} = 0$$

Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction ( $Ox$ ). L'étude des variations ne pose ici aucun problème et ne nécessite même absolument aucun calcul : la fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, elle est donc strictement croissante.




5. La fonction $f_5$ est définie quand $\frac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, donc (petit tableau de signe) sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup ]1; +\infty[$. En $-\frac{1}{2}$, il n'y a rien à faire, la fonction est définie (et prend pour valeur 0), il ne peut pas y avoir d'asymptote verticale. Par contre, en 1 , il y a bien une limite infinie, donc une asymptote verticale. Enfin, quand $x \to \pm\infty$, on a

$$\frac{2x+1}{x-1} \to 2$$

donc

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_5(x) = \sqrt{2}$$

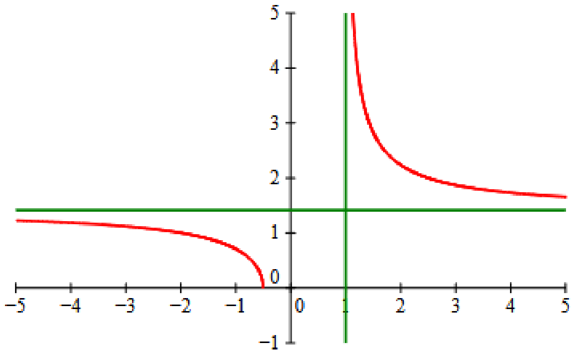
il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$. Par ailleurs, les variations de $f_5$ sont les mêmes que celles de

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

(puisque la racine carrée est strictement croissante), qui a pour dérivée

$$\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

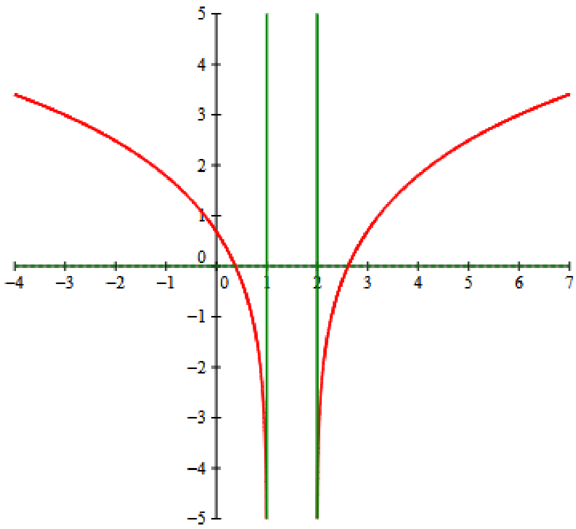
La fonction $f_5$ est donc décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition.




6. Enfin, $f_6$ est définie quand $x^2-3x+2>0$, c'est-à-dire en-dehors de ses racines évidentes qui sont 1 et 2 , donc $\mathcal{D}_{f_6} = ]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$. En 1 et 2 , la parenthèse tend vers 0 donc la fonction vers $-\infty$, il y a donc deux asymptotes verticales. En $\pm\infty$, la fonction tend vers $+\infty$, et

$$\frac{f_6(x)}{x} = \frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

Tout ceci tendant vers 0, il y a une branche parabolique de direction ( $Ox$ ) de chaque côté. La fonction ln étant strictement croissante, les variations de $f_6$ sont les mêmes que celles de $x \mapsto x^2-3x+2$, qui a pour dérivée $2x-3$. La fonction $f_6$ est donc décroissante sur $]-\infty;-1[$ et croissante sur $]2;+\infty[$.




---

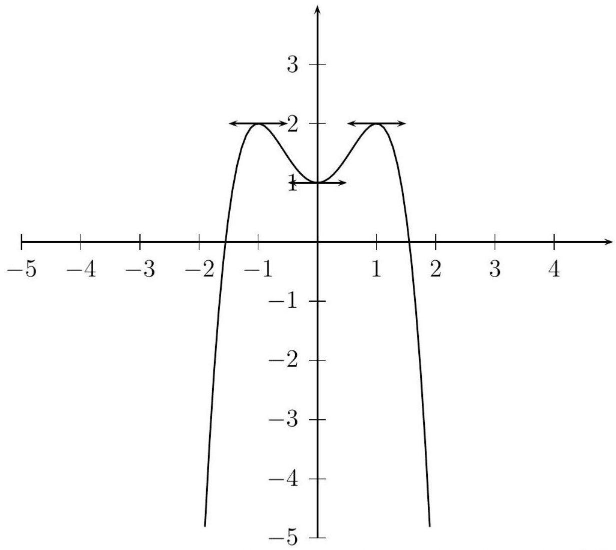
## Correction de l'exercice 21 ▲

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$. (On peut aussi dire que le domaine de définition est centré en 0 .) soit $x \in \mathbb{R}, f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -x^4 + 2x^2 + 1 = f(x)$, donc $f$ est paire
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$ et par symétrie : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
3. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x\left(1-x^2\right)$. D'une part $4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$, d'autre part $1-x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1;1]$ (règle du signe du trinôme), ce qui donne :

4.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

5.




Dans un graphique doivent apparaître toutes les droites dont il a été question dans le sujet, auquel s'ajoutent les tangentes horizontales.

---

## Correction de l'exercice 22 ▲

1. Le domaine de définition est centré en 1 , de plus pour tout $h \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[f(1+h)+f(1-h)] &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+h)^2+(1+h)+1}{1+h-1}+\frac{(1-h)^2+(1-h)+1}{1-h-1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3+3h+h^2}{h}+\frac{3-3h+h^2}{-h}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3+3h+h^2-3+2h-h^2}{h}\right] = \frac{1}{2}\times\frac{6h}{h} = 3\end{aligned}$$

Donc le point $\Omega$ de coordonnées $(1;3)$ est centre de symétrie de $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

2. • $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et par symétrie, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   • $\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right) = 3$ et $\lim_{x\to 1} x-1 = 0^+$, donc $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, et par symétrie : $\lim_{x\leq 1} f(x) = -\infty$.

3. Pour tout $x \neq 1$,

$$ax+b+\frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$$

, en identifiant le numérateur de cette fraction avec celui de $f(x)$, on obtient : $\begin{cases} a=1 \\ b-a=1 \\ c-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$ ,

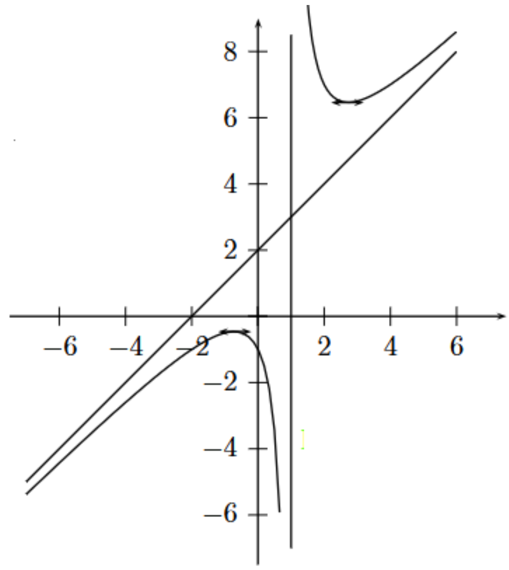
donc $f(x) = x+2+\frac{3}{x-1}$.

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x-1} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (x+2)) = 0$ et la droite $(d)$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
   Puisque $\Omega \in (d)$, nous pouvons déduire que $(d)$ est aussi asymptote à $\left(\mathcal{C}_f\right)$ en $-\infty$.

5. Pour $x \neq 1, f$ est dérivable comme quotient de deux polynômes, et :
   $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.
   Pour tout $x \neq 1, (x-1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x^2-2x-2$, polynôme ayant pour racines $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$ qui, d'après la règle du signe du trinôme est positif ssi $x \in ]-\infty; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; +\infty[$.

6.

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{3}$ | | $1$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3-2\sqrt{3}$ | $\searrow$ | $-\infty \;\|\|\; +\infty$ | $\searrow$ | $3+2\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

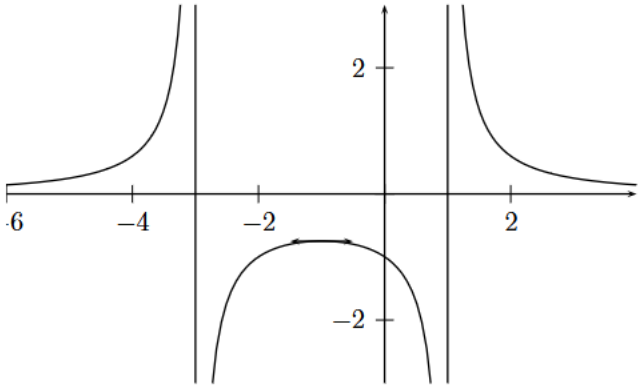



## Correction de l'exercice 23 ▲

1. $f$ est définie ssi $x^2+2x-3 \neq 0$ ssi $x \neq 1$ et $x \neq -3$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-3; 1\}$.
2. $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 1 , et pour tout $h \neq \pm 2$, on a :
   $f(-1+h) = \frac{3}{(-1+h)^2+2(-1+h)-3} = \frac{3}{h^2-4}$,
   et $f(1+h) = \frac{3}{(1+h)^2+2(1+h)-3} = \frac{3}{h^2-4}$.
   Donc $f(-1+h) = f(-1-h)$ et la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de $\left(\mathcal{C}_f\right)$.
3. 
   - $\lim_{x\leq 1} x^2+2x-3 = 0^-$, donc $\lim_{x\leq 1} f(x) = -\infty$, d'autre part : $\lim_{x\to 1} x^2+2x-3 = 0^+$, donc $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
     $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
     Remarque : Le signe ( $0^+$ou $0^-$) est facile à déterminer ici, cela serait plus compliqué avec par exemple : $x^2-2x$.
   - $\lim_{x\to+\infty} x^2+2x-3 = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
4. $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ : $f'(x) = \frac{-3(2x+2)}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$. Le dénominateur étant strictement positif, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -3(2x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$. 5.

5.

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{3}{4}$ ↘ | $-\infty$ | $\|$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |




---

## Correction de l'exercice 24 ▲

1. Le polynôme $x^2 - 2x + 2$ a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$, donc ce polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}$.

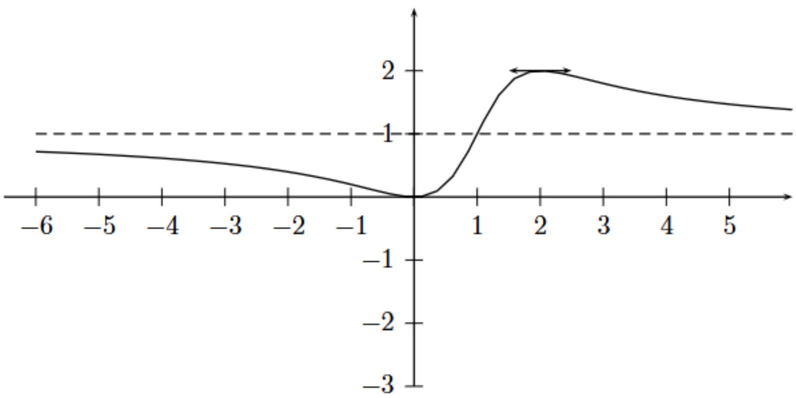
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, de même $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, donc $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Pour étudier les positions relatives de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et de $(\Delta)$, j' 'étudie le signe de $f(x) - 1$. $f(x) - 1 = \frac{x^2}{x^2-2x+2} - 1 = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$, donc $f(x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. Donc $\left(\mathcal{C}_f\right)$ est au dessus de son asymptote sur $[1, +\infty[$ et elle est en dessous sur $]-\infty; 1]$.

4. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x\left(x^2-2x+2\right)-x^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2} = \frac{2x(2-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$. $\left(x^2 - 2x + 2\right)^2$ étant strictement positif sur $\mathbb{R}, f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x(2-x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2]$.

5.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $2$ | ↘ | $1$ |



## Correction de l'exercice 25 ▲

1. $f$ est définie ssi $2x^2 \neq 0$ ssi $x \neq 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.

2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, de même $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}\left(2x^3+27\right) = 27 \\ \lim_{x\to 0} 2x^2 = 0^+\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty. \text{ (à gauche et à droite)}$$

3. Pour tout $x \neq 0, f(x) - x = \frac{2x^3+27}{2x^2} - x = \frac{27}{2x^2}$, or $\lim_{x\to+\infty} \frac{27}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{27}{2x^2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

4.

   (a) La fonction $x \mapsto x^3$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $x \geqslant 3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 3^3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 27$.

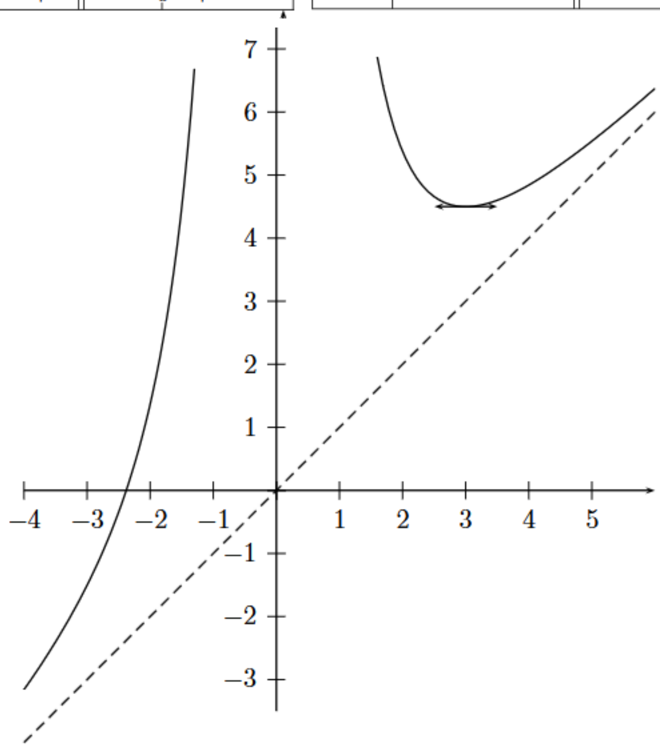
   (b) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{6x^2 \times 2x^2 - \left(2x^3+27\right) \times 4x}{4x^4} = \frac{x\left(x^3-27\right) \times 4x}{x^4}$$

   (c)

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x^3-27$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^4$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $\frac{9}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ |




## Correction de l'exercice 26 ▲

1. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$.

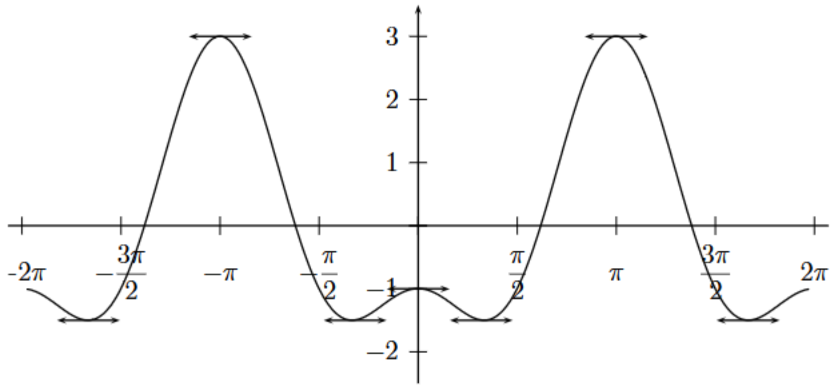
(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos 2x - 2\cos x = f(x)$, donc $f$ est périodique, de période $2\pi$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \cos(-2x) - 2\cos(-x) = \cos(2x) - 2\cos x = f(x)$, donc $f$ est paire.

2. (a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x = -4\sin x\cos x + 2\sin x = 2\sin x(-2\cos x + 1)$.

   (b) Pour tout $x \in ]0;\pi[, \sin x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\cos x$.
Remarque : on a $f'(0) = f'(\pi) = 0$.
Or, pour $x \in [0,\pi], 1 - 2\cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{2}$ | $\nearrow$ | $3$ |




---

## Correction de l'exercice 27 ▲

1. $f$ est définie ssi $1 - \sin x \neq 0$ ssi $\sin x \neq 1$ ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{1-\sin(x+2\pi)} = \frac{\sin x}{1-\sin x} = f(x)$, donc $f$ est $2\pi$-périodique.

3. (a) $\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}} 1 - \sin x = 0^+$donc $\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}} f(x) = +\infty$

   (b) $\lim_{x\leq \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim_{x\leq\frac{\pi}{2}} 1 - \sin x = 0^+$donc $\lim_{x\leq\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$

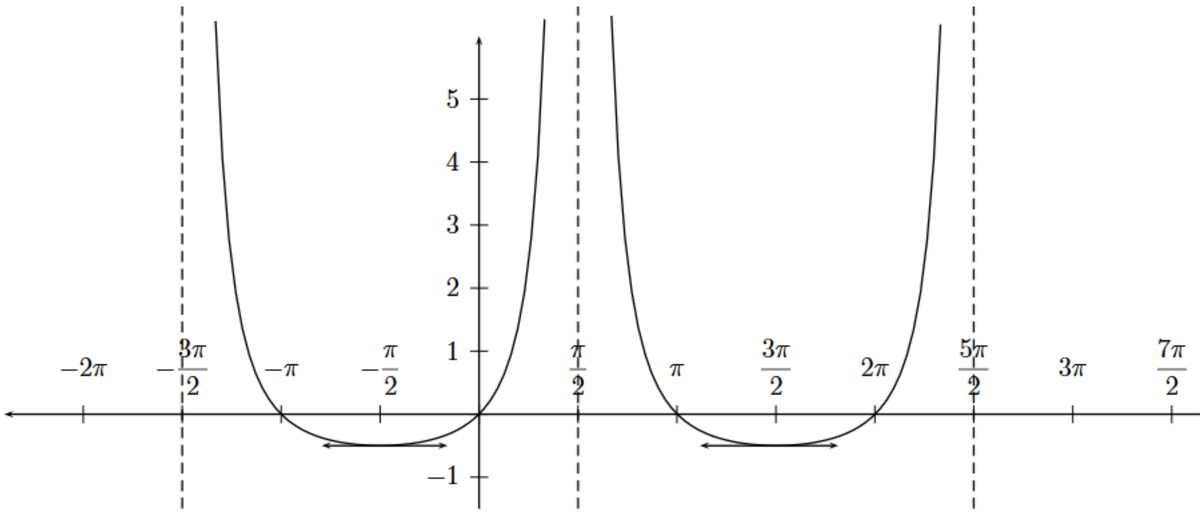
4. Pour tout $x \in ]-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, f$ est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\cos x(1-\sin x) - \sin x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

$$(1-\sin x)^2 > 0, \text{ donc } f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right].$$

5.

| $x$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ |
| $f(x)$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ $\Vert$ |




---

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. Sur $[1;\infty[, f(x) = x - \sqrt{x-1}$ et sur $]-\infty;1], f(x) = x - \sqrt{1-x}$.

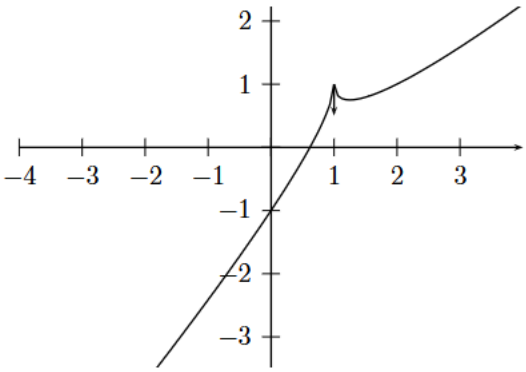
2. $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty$.
   et $\lim_{x\leq 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\leq 1} \frac{x-\sqrt{1-x}-1}{x-1} = \lim_{x\leq 1} 1 - \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x\leq 1} 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$.
   Donc $f$ n'est pas dérivable en 1 .
   En fait, une seule de ces limites était suffisante, mais j'ai mis les deux pour que vous puissiez apprécier le changement de signe à la dernière étape de la deuxième limite.

3. Sur $]-\infty;1], f(x) = x - \sqrt{1-x}$. On a : $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   Et $f'(x) = 1 - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ qui est positif sur $]-\infty;1[$, donc $f$ est croissante sur cet intervalle.

4. Sur $[1;+\infty[, f(x) = x - \sqrt{x-1}$. On a : $f(x) = x - \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = x\left(1 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2} = x \text{ car } x > 0\right)$
   Or $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Et $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{1-x}}$.
   Pout tout $x \in ]1;+\infty[$,
   $\sqrt{x-1} > 0$ et $2\sqrt{x-1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{5}{4}$.

5.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{5}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




## Correction de l'exercice 29 ▲

## Correction de l'exercice 30 ▲

## Correction de l'exercice 31 ▲

## Correction de l'exercice 32 ▲

istom Ecole supérieure d'agro-développement international

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ..............................................................................

Promotion, groupe : ..............................................................................

Email : ..............................................................................

## Auteurs de ces notes de cours

D'après un cours de Arnaud Bodin.
Revu et augmenté par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).