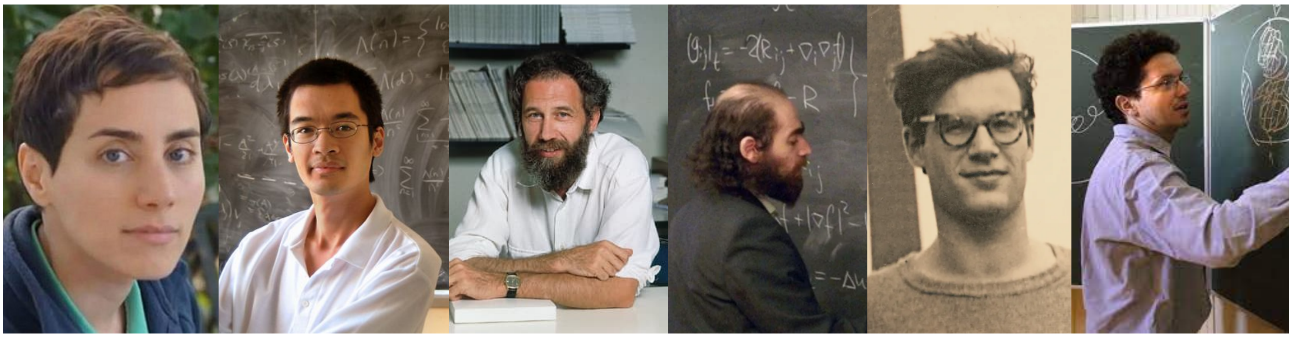
Fonctions usuelles

Antoine Géré

Année 2025 - 2026[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Table des matières

[1] version du 16 décembre 2025

1 Logarithme et exponentielle

1.1 Logarithme

Proposition 1.
Il existe une unique fonction, notée

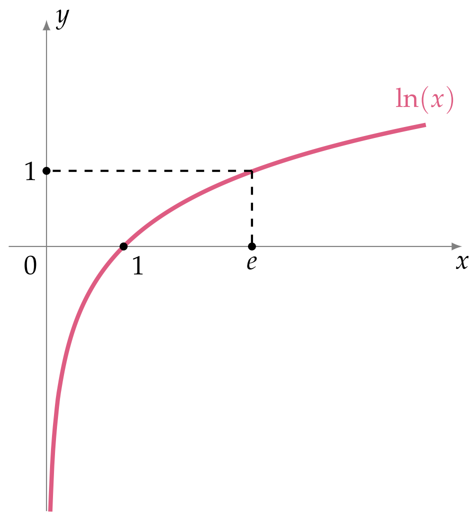
$$\ln \;:\;]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{pour tout } x > 0 \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie, pour tout $a, b > 0$:

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$,
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$,
3. $\ln(a^n) = n \;\ln(a)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$
4. $\ln$ *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
6. *la fonction* $\ln$ *est concave et* $\ln(x) \leq x - 1$ *pour tout* $x > 0$.



Remarque.

- La fonction $\ln x$ s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme néperien. Il est caractérisé par $\ln(e) = 1$. On définit le logarithme en base a par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

De sorte que $\log_a(a) = 1$. Pour $a = 10$ on obtient le logarithme décimal $\log_{10}$ qui vérifie

$$\log_{10}(10) = 1 \quad \text{et donc} \quad \log_{10}(10^n) = n.$$

Dans la pratique on utilise l'équivalence

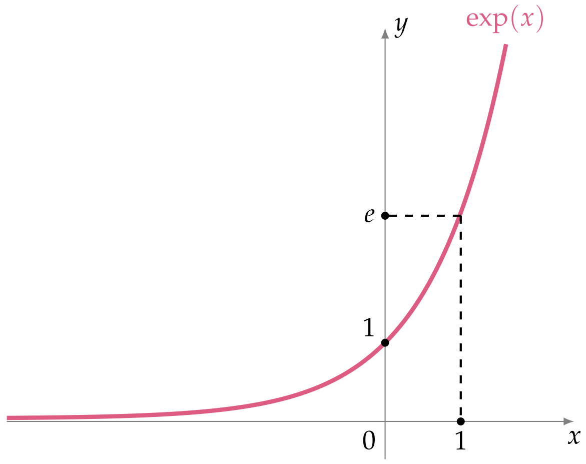
$$x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)$$

- Nous avons les deux limites usuelles suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x\ \ln(x) = 0$$

1.2 Exponentielle

Définition 1.
La bijection réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$.



Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition 2.
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- $\exp(\ln(x)) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp(x)) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
- $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$

- *La fonction exponentielle est dérivable et*

$$\exp'(x) = \exp(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Elle est convexe et* $\exp(x) \geq 1 + x$.

- *Nous avons les deux limites usuelles suivantes*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x\ \exp(x) = 0$$

Remarque.
La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(1) = e$, où $e \simeq 2,718\ldots$ est le nombre qui vérifie $\ln e = 1$.

1.3 Fonctions puissances

Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a

$$a^b = \exp(b\ \ln(a)).$$

Remarque.

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\ \ln(a)\right)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ \ln(a)\right)$, la racine n-ème de a
- On note aussi $\exp(x)$ par e^x ce qui se justifie par le calcul : $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$.
- Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité

  $$a^x = \exp(x\ln(a)).$$

  Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances

  $$x \mapsto x^a.$$

Proposition 3.
Soit $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $\ln(x^a) = a\ln(x)$

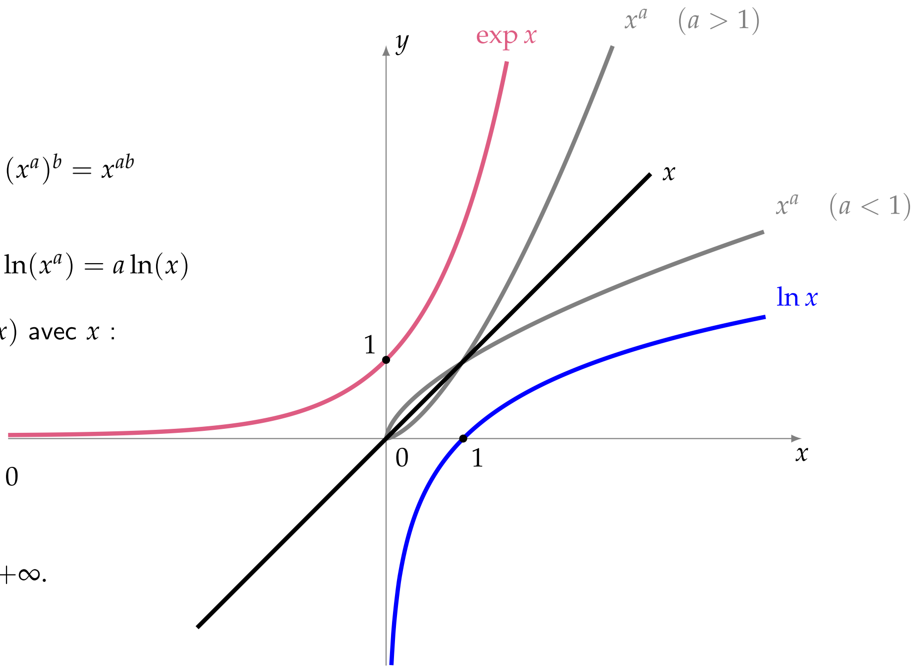
Comparons les fonctions $\ln(x)$, $\exp(x)$ avec x :

Proposition 4.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty.$$



2 Fonctions circulaires et circulaires inverses

2.1 Cosinus et Arccosinus

Considérons la fonction cosinus

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{cases}$$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

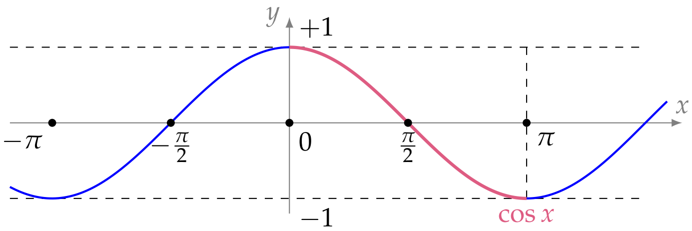
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

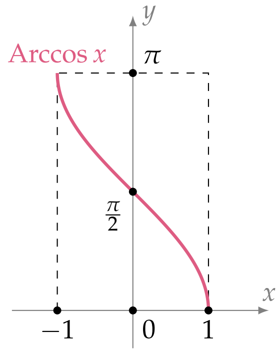
est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus** :

$$\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad \cos\left(\mathrm{Arccos}(x)\right) = x$$





et

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad \operatorname{Arccos}\big(\cos(x)\big) = x$$

Autrement dit, si $x \in [0,\pi]$ on a alors

$$\cos(x) = y \iff x = \operatorname{Arccos} y$$

Terminons avec la dérivée de Arccos :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.2 Sinus et Arcsinus

Considérons la fonction sinus

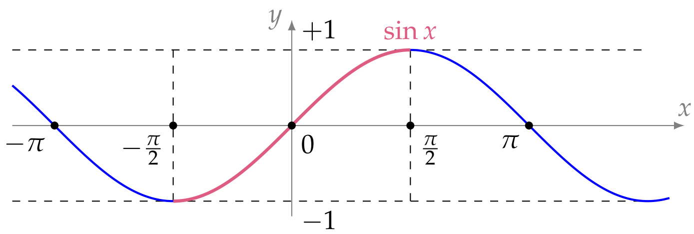
$$\sin : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

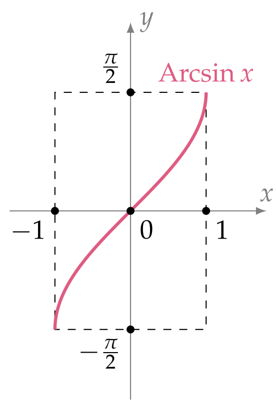
Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle la fonction sinus est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** :

$$\operatorname{Arcsin} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \sin\big(\operatorname{Arcsin}(x)\big) = x$$

et

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], \qquad \text{Arcsin}\left(\sin(x)\right) = x$$

Autrement dit, si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a alors

$$\sin(x) = y \iff x = \text{Arcsin}(y)$$

Terminons avec la dérivée de Arcsin :

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.3 Tangente et Arctangente

Considérons la fonction tangente

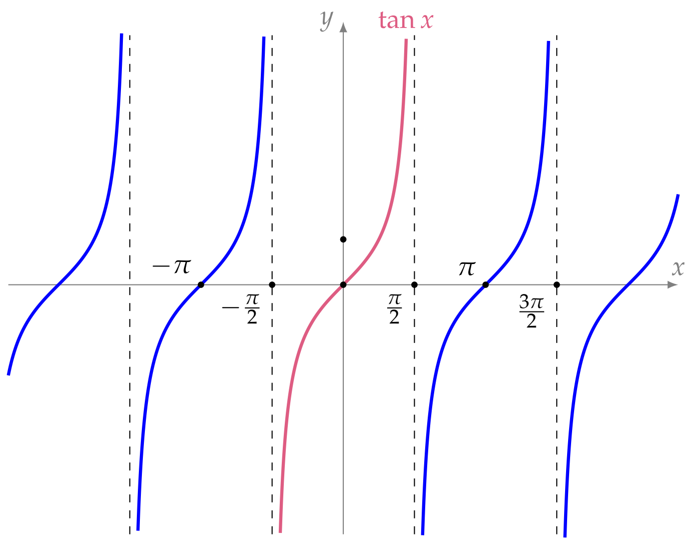
$$\tan : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle la fonction tangente est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arctangente** :

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan\left(\text{Arctan}(x)\right) = x$$

et

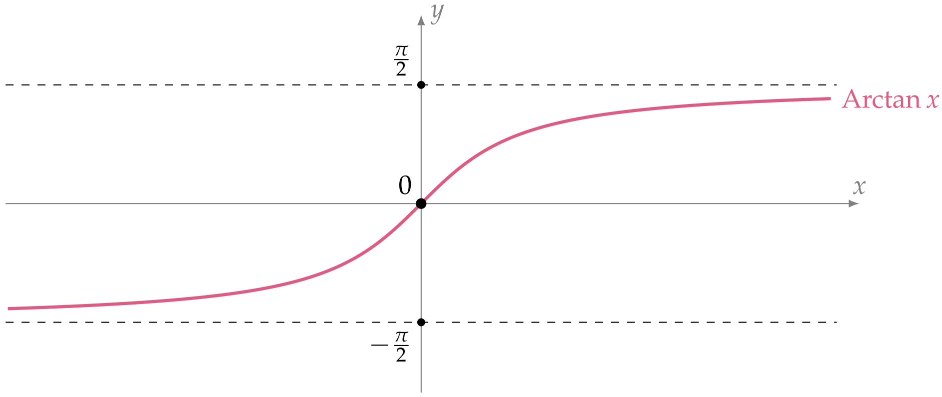
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[, \quad \text{Arctan}\left(\tan(x)\right) = x$$

Autrement dit, si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a alors

$$\tan(x) = y \iff x = \text{Arctan}(y)$$

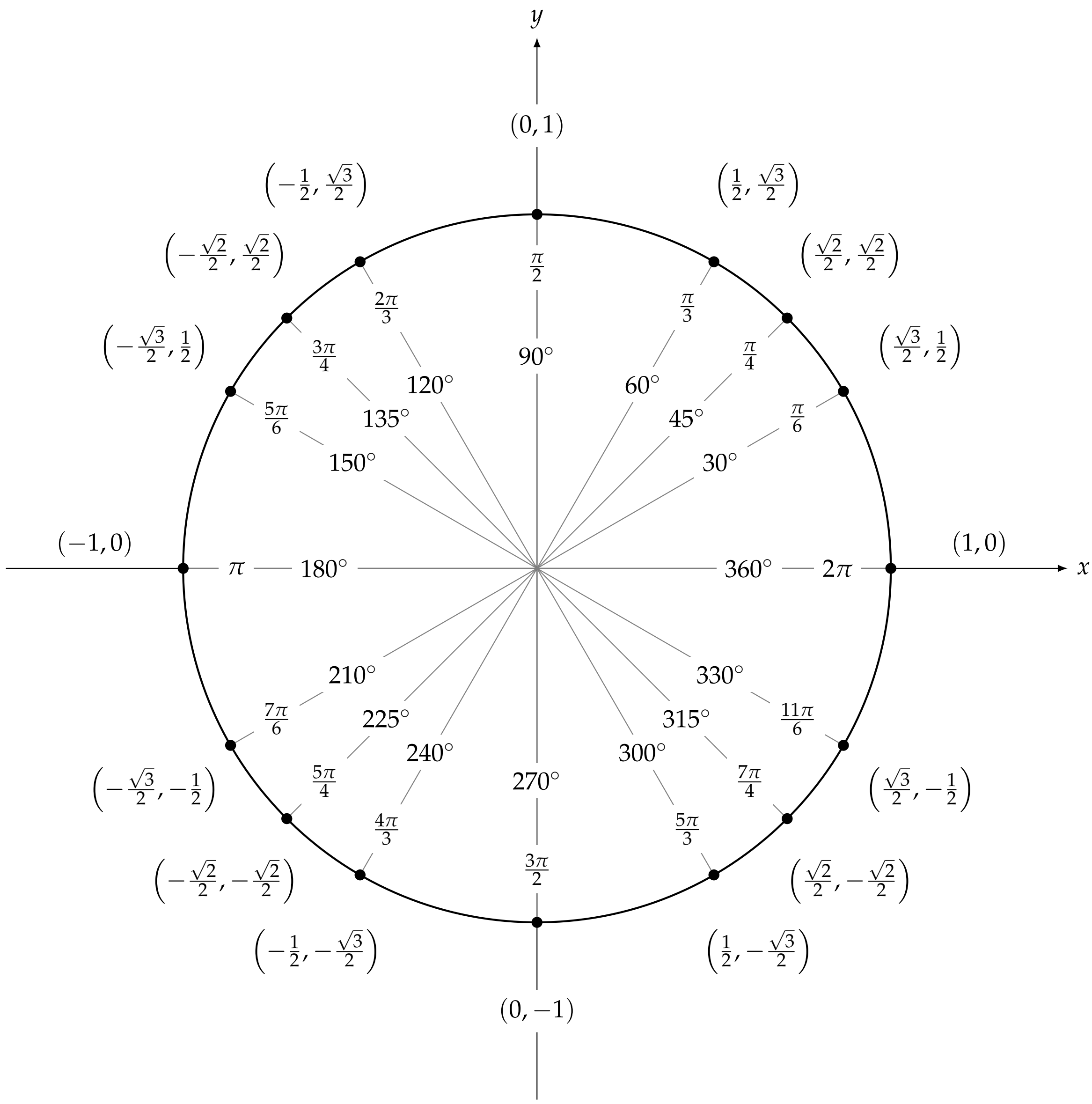
Terminons avec la dérivée de Arctan :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



2.4 Trigonométrie circulaire

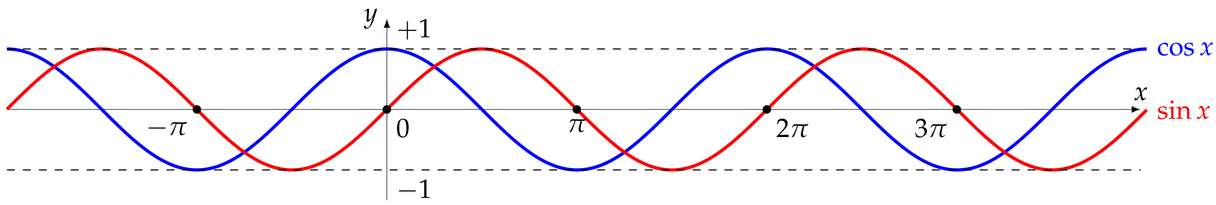
2.4.1 Le cercle trigonométrique



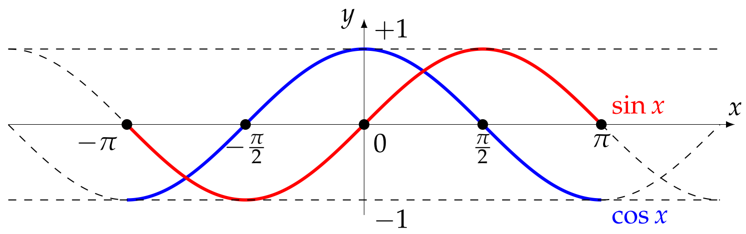
Voici le cercle trigonométrique (de rayon 1), le sens de lecture est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre. Les angles remarquables sont marqués de 0 à 2π (en radian) et de $0°$ à $360°$. Les coordonnées des points correspondant à ces angles sont aussi indiquées.

2.4.2 Les fonctions sinus, cosinus, tangente

La fonction cosinus est périodique de période 2π et elle paire (donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). La fonction sinus est aussi périodique de période de 2π mais elle impaire (donc symétrique par rapport à l'origine).



Voici un zoom sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.



Pour tout x n'appartenant pas à $\left\{\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\right\}$ la fonction tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π ; c'est une fonction impaire.
Voici les dérivées :

$$\cos(x)' = -\sin(x) \qquad \sin(x)' = \cos(x) \qquad \tan(x)' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

2.4.3 Formulaire

Voici un lien d'une vidéo présentant un moyen simple de retenir l'intégralité du formulaire de trigonométrie.

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

et

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Les **formules d'additions**

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b) \\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cdot\cos(b) + \sin(b)\cdot\cos(a) \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\cdot\tan(b)}
\end{aligned}$$

Il est bon de connaître par cœur les **formules de duplications** suivantes (faire $a = b$ dans les formules d'additions) :

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \;=\; 1 - 2\sin^2 a \;=\; \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cdot\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Les **formules de linéarisation** :

$$\cos(a)\cdot\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$
$$\sin(a)\cdot\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$$
$$\sin(a)\cdot\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

Les **formules de factorisation** :

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Enfin les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\frac{x}{2}$. On pose

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

on a alors

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ces formules sont utiles pour le calcul de certaines intégrales par changement de variable, en utilisant en plus la relation

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

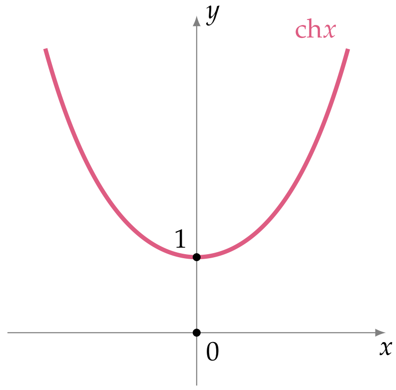
3.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est définie par la relation

$$\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{cases}$$

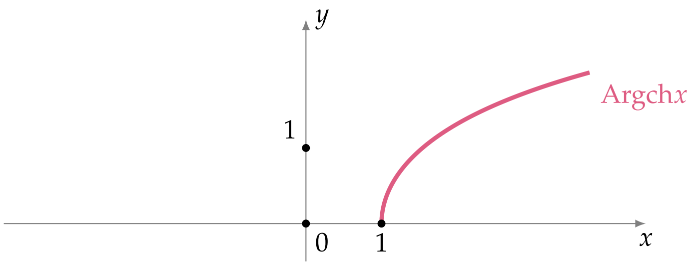
Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus hyperbolique à l'intervalle $[0,+\infty[$. Sur cet intervalle la fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\text{ch} :\; [0,+\infty[\;\to [1,+\infty[$$



est une bijection.
Sa bijection réciproque est la fonction **arrgument cosinus hyperbolique** :

$$\text{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[.$$



Proposition 5.

- *Pour tout* $x \in [0, +\infty[$ *et* $y \in [1, +\infty[$ *on a*
$$y = \text{ch}(x) \iff \text{Argch}(y) = x$$
- *Pour tout* $x \in [0, +\infty[$ *on a*
$$\text{Argch}\,(\text{ch}(x)) = x$$
- *Pour tout* $y \in [1, +\infty[$ *on a*
$$\text{ch}\,(\text{Argch}(y)) = y$$

La fonction $\text{Argch} \circ \text{ch}$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas l'identité sur $\mathbb{R}$. Pour $x < 0$ on a

$$\text{Argch}\,(\text{ch}(x)) = -x.$$

Terminons avec la dérivée de Argch :

$$\forall y > 1, \qquad \text{Argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Définition de $\text{Argch}(y)$ **pour** $y \geq 1$.

Pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch}(y) = x &\iff y = \operatorname{ch}(x)\\
&\iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\
&\iff 2y = e^x + e^{-x}\\
&\iff e^x + \frac{1}{e^x} = 2y\\
&\iff \frac{e^{2x}+1}{e^x} = 2y\\
&\iff e^{2x} + 1 = 2y\ e^x\\
&\iff e^{2x} - 2y\ e^x + 1 = 0\\
\operatorname{Argch}(y) = x &\iff (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0
\end{aligned}$$

On étudie alors le trinome du second degré :

$$X^2 - 2yX + 1 = 0$$

Or

$$\begin{aligned}
X^2 - 2yX + 1 &= (X-y)^2 - y^2 + 1\\
&= (X-y)^2 - (y^2-1)\\
&= \left(X - y - \sqrt{y^2-1}\right)\left(X - y + \sqrt{y^2-1}\right)
\end{aligned}$$

Le trinome a deux racines réelles strictement positive,

$$y + \sqrt{y^2-1} \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2-1}$$

Or on souhaite $x \geq 0$ on conserve donc uniquement la solultion supérieure à 1. On a alors

$$\operatorname{Argch}(y) = x \quad \iff \quad e^x = y + \sqrt{y^2-1}$$

Donc pour $y \geq 1$ on a

$$\operatorname{Argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

3.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est définie par la relation

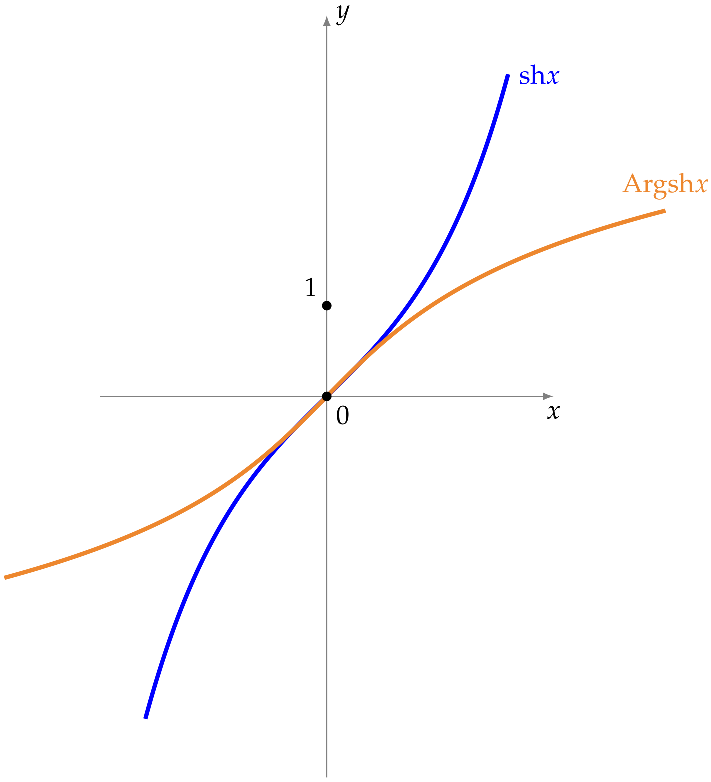
$$\operatorname{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle forme une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arrgument sinus hyperbolique** :

$$\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Proposition 6.

- $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$
- $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x$, *et* $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$



- $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*
- Argsh *est dérivable et*

$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$ *on a*

$$y = \mathrm{sh}(x) \iff \mathrm{Argsh}(y) = x$$

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\mathrm{Argsh}\left(\mathrm{sh}(x)\right) = x$$

- *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}(y)\right) = y$$

Définition de $\mathrm{Argsh}(y)$ **pour** $y \geq 1$**.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Argsh}(y) = x &\iff y = \mathrm{sh}(x) \\
&\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\mathrm{Argsh}(y) = x &\iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0
\end{aligned}$$

On étudie alors le trinome du second degré :

$$X^2 - 2yX - 1 = 0$$

Ses solutions sont $\forall y \in \mathbb{R}$

$$y - \sqrt{y^2+1} < 0 \quad \text{et} \quad y + \sqrt{y^2+1} > 0$$

On conserve donc uniquement la solultion positive. On a alors

$$\operatorname{Argsh}(y) = x \iff e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

Donc pour $y \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{Argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

3.3 Tangente hyperbolique et son inverse

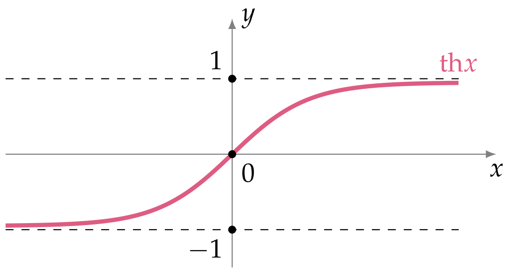
La fonction tangente hyperbolique est definie comme

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

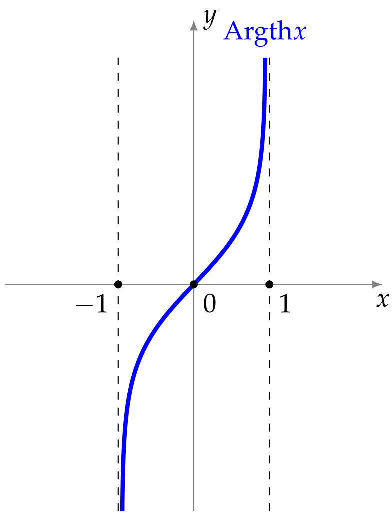
La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$$

la fonction tangente hyperbolique est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.



La bijection reciproque est appelée arrgument tangente hyperbolique et notée Argth.



Proposition 7.

- *Pour tour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$ on a*

$$y = \operatorname{th}(x) \iff \operatorname{Argth}(y) = x$$

- *Pour tour $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\operatorname{Argth}(\operatorname{th}(x)) = x$$

- *Pour tour* $y \in]-1,1[$ *on a*
$$\mathrm{th}\left(\mathrm{Argth}(y)\right) = y$$

La afonction tangente hyperbolique et sa bijection réciproque sont tputes les deux dérivable.

Proposition 8.

- *Pour tour* $x \in \mathbb{R}$ *on a*
$$\mathrm{th}(x)' = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$
- *Pour tour* $y \in]-1,1[$ *on a*
$$\mathrm{Argth}(y)' = \frac{1}{1-y^2}$$

Définition de $\mathrm{Argth}(y)$ **pour** $y \in]-1,1[$**.**

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-y} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+y}$$

Les primitives de $y \mapsto \dfrac{1}{1-y^2}$ sur $]-1,1[$ sont

$$y \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1-y) + \frac{1}{2}\ln(1+y) + K = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + K$$

avec $K \in \mathbb{R}$. Argth est la primitive de $y \mapsto \dfrac{1}{1-y^2}$ qui s'annule en 0, donc pour $y \in]-1,1[$ on a

$$\mathrm{Argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

3.4 Trigonométrie hyperbolique

On a une première relation :

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

Formules d'additions :

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{sh}\,b \qquad \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,b \cdot \mathrm{ch}\,a \qquad \mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1 + \mathrm{th}\,a \cdot \mathrm{th}\,b}$$

Formules de duplications :

$$\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a = 2\,\mathrm{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 a$$

$$\mathrm{sh}(2a) = 2\,\mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{ch}\,a \qquad \mathrm{th}(2a) = \frac{2\,\mathrm{th}(a)}{1 + \mathrm{th}(a)^2}$$

Formules de factorisation :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}(p) + \operatorname{ch}(q) &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\operatorname{sh}(p) - \operatorname{sh}(q) &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\operatorname{th}(p) + \operatorname{th}(q) &= \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch}(p)\operatorname{ch}(q)}\\
\operatorname{th}(p) - \operatorname{th}(q) &= \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch}(p)\operatorname{ch}(q)}
\end{aligned}
$$

Dérivées :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh} x\\
\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x\\
\operatorname{th}'(x) &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\\
\operatorname{Argch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)\\
\operatorname{Argsh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\
\operatorname{Argth}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}
$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproque :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Argch}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geq 1)\\
\operatorname{Argsh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})\\
\operatorname{Argth}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}
$$

4 Exercices

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
2. $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$.

Correction ▼ [07.0000]

Exercice 2

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

1. $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$
2. $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$

Correction ▼ [07.0001]

Exercice 3 Limites et exponentielle

Déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}$

Correction ▼ [07.0002]

Exercice 4 Les principales formes indéterminées

Déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\exp(x) - x^3\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(x) - x - \sqrt{x})$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\exp\left(\frac{1}{x} - 1\right)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}$

Correction ▼ [07.0003]

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions suivantes. C'est un exercice d'entraînement au calcul, on ne demande pas de déterminer les ensembles sur lesquels les fonctions sont dérivables.

1. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 7$.
2. $f(x) = \dfrac{4x-1}{7x+2}$.
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$.
4. $f(x) = 6\sqrt{x}$.
5. $f(x) = 4\sin x + \cos(2x)$.
6. $f(x) = \cos(-2x+5)$.
7. $f(x) = \sin x^2$.
8. $f(x) = \sin^2 x$. (On peut aussi noter $(\sin x)^2$)
9. $f(x) = \tan x$.
10. $f(x) = (2x-5)^4$. (Développement déconseillé)
11. $f(x) = \frac{7}{x^2-9}$.
12. $f(x) = \sqrt{4x^2-3}$.
13. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$.
14. $f(x) = \left(\dfrac{4x-1}{x+2}\right)^3$.
15. $f(x) = x\ln x - x$;
16. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
17. $f(x) = \ln\sqrt{x}$;
18. $f(x) = (\ln x)^2$;
19. $f(x) = \ln\left(x^2\right)$
20. $f(x) = \exp\left(x^2+3x-1\right)$;
21. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;
22. $f(x) = e^{e^x}$;
23. $f(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}$

Correction ▼ [07.0004]

Exercice 6

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ? En déduire qu'ill suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$ pour construire toute la courbe représentative de f.
3. Montrer que, pour tout réel x, on a
$$f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$$
4. Étudier le signe de $1+2\cos x$ sur $[0,\pi]$.
5. Établir le tableau de variations de f sur $[\mathbf{0},\pi]$.
6. Tracer la courbe représentative de f.

Correction ▼ [07.0005]

Exercice 7

Soit

$$f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Etudier la parité et la périodicité de f
3. Calculer la dérivée de f
4. Dresser le tableau de variation de f

5. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [07.0006]

Exercice 8

Soit

$$f(x) = Arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Calculer la dérivée de f
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [07.0007]

Exercice 9

Soit

$$f(x) = Argch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Simplifier f, si c'est possible.
3. Calculer la dérivée de f
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [07.0008]

Exercice 10

Soit

$$f(x) = Argsh\left(2x+8e^{-x}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Calculer la dérivée de f
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [07.0009]

Exercice 11

Soit $a \neq 0$ un réel.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{Arctan}(ax)$$

2. En déduire une primitive de $\dfrac{1}{4+x^2}$.

Correction ▼ [07.0010]

Exercice 12

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x)\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la periodicité et la parité de f. En déduire l'intervalle d'étude I le plus petit possible.
3. Calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer son graphe sur trois périodes

Correction ▼ [07.0011]

Exercice 13

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \operatorname{Arctan}(x)$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour tout x réel, calculer la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f au point x.
3. Que dire de f.

Correction ▼ [07.0012]

Exercice 14

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$$

Et g la fonction définie par

$$g(x) = \operatorname{Arctan}\left(e^x\right)$$

1. Déterminer sur quel ensemble f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$ et déterminer sur quel ensemble f est dérivable.
3. Calculer $g'(x)$
4. Pour tout $x > 0$ trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

Correction ▼ [07.0013]

Exercice 15

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Correction ▼ [07.0016]

Exercice 16

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude I le plus petit possible. On justifiera ce choix.
3. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle
$$J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
4. Calculer les limites de f aux bornes de J.
5. Calculer la dérivée de f.
6. Etablir le tableau de variation de la fonction f.
7. Tracer la courbe représentative de f.

Correction ▼ [07.0015]

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Correction ▼ [07.0017]

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x)$$

1. Déterminer la période de f, sa parité et en déduire un intervalle d'étude I.
2. Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Etudier les variation de f sur I.
4. Calculer $f(0), f(x_0)$ et $f(\pi)$ sous forme rationnelle. Où x_0 est l'unique valeur dans $]0, \pi[$ annulant $f'(x)$.

5. Dresser le tableau de variation. Tracer sommairement le graphe de f sur trois périodes.

Correction ▼ [07.0018]

Exercice 19

Soit $f : [-\pi, \pi] \to R$ définie par $f(x) = 4x - 5\sin(x)$

1. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
2. Montrer que f' dans l'intervalle $[0, \pi]$ s'annule pour une valeur comprise entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
4. Tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Correction ▼ [07.0019]

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos(x) + \frac{2}{3}x$

1. Montrer que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, en déduire un encadrement de $\text{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)$.
2. Etudier les variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
3. On donnera un encadrement de $f\left(\text{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.
4. Tracer le graphe de f.

Correction ▼ [07.0020]

Exercice 21

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ?
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tous les réels pour lesquels cela ne posent pas de problème.
3. Calculer les limites de $f'(x)$ en $-1^+, 1^-$, ainsi qu'en 0^-et 0^+. Préciser la nature des demi-tangentes en ces points.
4. Déterminer les variations de f.
5. Tracer le graphe de f.

Correction ▼ [07.0021]

Exercice 22

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x)\right)$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I.

3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.

4. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ? Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π.

5. Dresser le tableau de variation de f

6. Tracer son graphe sur trois périodes

Correction ▼ [07.0022]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Posons $X = e^x$. Alors l'équation devient
$$X^2 - X - 6 = 0$$
Les racines de cette équation sont $X = -2$ et $X = 3$. Mais seule la racine positive nous intéresse ici, car l'exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. On en déduit que l'équation admet une unique racine, qui est égale à $\ln 3$.

2. On pose de même $X = e^x$. L'équation devient
$$3X - \frac{7}{X} - 20 = 0$$
qui est encore équivalente à
$$3X^2 - 20X - 7 = 0$$
(on ne sintéresse qu'aux solutions strictement positives). Les solutions de cette dernière équation sont $X = -\frac{1}{3}$ et $X = 7$. Seule la seconde est strictement positive. On déduit donc que l'équation $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$ admet une unique solution donnée par $x = \ln(7)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La première équation est équivalente à $e^{x+y} = 10$ ou encore, en utilisant le logarithme, à $x + y = \ln(10) = \ln(2) + \ln(5)$. La seconde équation est équivalente, toujours en utilisant le logarithme, à $x - y = \ln(2/5) = \ln(2) - \ln(5)$. Ainsi, le système est équivalent à
$$\begin{cases} x + y = \ln(2) + \ln(5) \\ x - y = \ln(2) - \ln(5) \end{cases}$$
On trouve alors facilement que le seul couple solution est $x = \ln(2), y = \ln(5)$.

2. On résoud le système classiquement. On trouve qu'il est équivalent à
$$\begin{cases} e^x = 3 \\ e^y = 4 \end{cases}$$
Prenant le logarithme, on trouve un seul couple solution donné par $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$.

3. Posons $a = e^x$ et $b = e^y$. Le système est alors équivalent à
$$\begin{cases} 5a - b &= 19 \\ ab &= 30 \end{cases} \iff \begin{cases} ba - 19 & \\ a(5a - 19) &= 30 \end{cases}$$
La seconde équation est une équation du second degré : $5a^2 - 19a - 30 = 0$. Ces solutions sont $a = -6/5$ et $a = 5$. Mais a doit être strictement positif, donc $-6/5$ ne convient pas. On a donc $\boldsymbol{a} = 5$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{6}$. La seule solution du système est doncle couple $x = \ln(5)$ et $y = \ln(6)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. La première limite donne une forme indéterminée ∞/∞. On lève lindétermination en factorisant par e^x au dénominateur :
$$\frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{e^x}{e^x\,(2 + e^{-3x})} = \frac{1}{2 + e^{-3x}}$$
Comme
$$\lim_{x \to -\infty} e^{-3x} = 0$$
on en déduit que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{1}{2}$$

2. La deuxième limite n'est pas une forme indéterminée. En effet, on a

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} 2e^x + e^{-2x} = +\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = 0$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On factorise

$$\exp(x) - x^3 = \exp(x)\left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)}\right)$$

Par le théorème de croissance comparée,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\exp(x)} = 0$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)}\right) = 1$$

puis

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x)\left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)}\right) = +\infty$$

2. On factorise

$$\ln(x) - x - \sqrt{x} = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Par le théorème de croissance comparée et les limites usuelles :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -1$$

puis

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

3. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}$$

Or, par les limites usuelles et les opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}=+\infty$$

4. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{7x+\ln(x)}{7x+\exp(x)} = \frac{x\left(7+\frac{\ln(x)}{x}\right)}{\exp(x)\left(\frac{7x}{\exp(x)}+1\right)} = \frac{x}{\exp(x)}\times\frac{7+\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{7x}{\exp(x)}+1}$$

Par le théorème de croissance comparée et les opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7+\frac{\ln(x)}{x}\right)=7, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x}{\exp(x)}+1\right)=1$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{7x}{\exp(x)}+1}=7$$

Puisque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\exp(x)}=0$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+\ln(x)}{7x+\exp(x)}=0$$

5. On pose $u=\sqrt{3x}$ de sorte que si $x\to+\infty$, alors $u\to+\infty$. De plus, $x=\frac{u^2}{3}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})} &= \frac{\ln\left(\frac{u^2}{3}\right)}{\exp(u)}\\ &= \frac{\ln\left(u^2\right)-\ln(3)}{\exp(u)}\\ &= \frac{2\ln(u)-\ln(3)}{\exp(u)}\\ &= 2\frac{\ln(u)}{\exp(u)}-\frac{\ln(3)}{\exp(u)}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})}=\lim_{u\to+\infty}\left(2\frac{\ln(u)}{\exp(u)}-\frac{\ln(3)}{\exp(u)}\right)=0$$

6. On écrit
$$x\exp\left(\frac{1}{x}-1\right)=x\exp\left(\frac{1}{x}\right)\exp(-1)$$
puis on pose $u=1/x$ de sorte que si $x\to 0^+$alors $u\to+\infty$. On a alors
$$\begin{aligned}x\exp\left(\frac{1}{x}-1\right)&=x\exp\left(\frac{1}{x}\right)\exp(-1)\\&=\frac{1}{u}\exp(u)\exp(-1)\\&=\exp(-1)\times\frac{\exp(u)}{u}\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\lim_{x\to 0^+}x\exp\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{u\to+\infty}\exp(-1)\times\frac{\exp(u)}{u}=+\infty$$
7. On écrit
$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7}&=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}}\\&=\frac{(x+2)-(x+7)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}}\\&=\frac{-5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}}\end{aligned}$$
Puisque
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$$
et que
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}=+\infty$$
on a
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7})=+\infty$$
Finalement,
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7})=0$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $f'(x)=12x^2-6x+1$.
2. Je pose $u(x)=4x-1$ et $v(x)=7x+2$, ce qui donne $u'(x)=4$ et $v'(x)=7$, j'applique la formule
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
et j 'obtiens :
$$f'(x)=\frac{4(7x+2)-(4x-1)\times 7}{(7x+2)^2}=\frac{15}{(7x+2)^2}$$
Remarque : vous avez le droit d'écrire directement la deuxième ligne.
3. Je pose $u(x)=x$ et $v(x)=x^2-3$, ce qui donne $u'(x)=1$ et $v'(x)=2x$ et j'obtiens :
$$f'(x)=\frac{1\,(x^2-3)-x\times 2x}{(x^2-3)^2}=\frac{-x^2-3}{(x^2-3)^2}$$

4. $f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$.
5. La dérivée de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto -2\sin(2x)$, donc $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$.
6. Je pose $u(x) = -2x+5$, donc $u'(x) = -2$ et j' applique $(\cos u)' = -u' \sin u$, donc $f'(x) = 2\sin(-2x+5)$.
7. Je pose $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$ et j'applique $(\sin u)' = u' \cos u$, donc $f'(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$.
8. Je pose $u(x) = \sin x$, donc $u'(x) = \cos x$ et j'applique $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $n = 2$, donc $f'(x) = 2\cos x \sin x$. Et puisque je connais quelques formules de trigo : $f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$.
9. $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, on a donc :
$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
Remarque : on peut aussi l'écrire sous la forme : $f'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
10. J'applique $(u^n)' = nu'u^{n-1}$: $f'(x) = 4 \times 2 \times (2x-5)^3 = 8(2x-5)^3$.
11. J'applique : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$, donc $f'(x) = 7 \times \left(-\frac{2x}{(x^2-9)^2}\right) = -\frac{14x}{(x^2-9)^2}$.
12. J'applique $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$.
13. J'applique les deux formules précédentes et :
$$f'(x) = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2} = -\frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$
14. Je pose $u(x) = \frac{4x-1}{x+2}$, que je dérive : $u'(x) = \frac{4(x+2)-(4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}$, puis j'applique $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, donc $f'(x) = 3 \times \frac{9}{(x+2)^2} \times \left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2 = \frac{27(4x-1)^2}{(x+2)^4}$.
15. $f'(x) = ln(x)$
16. $f'(x) = \frac{-1}{x}$
17. $f'(x) = \frac{1}{2x}$
18. $f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$
19. $f'(x) = \frac{2}{x}$
20. $f'(x) = (2x+3)\exp\left(x^2+3x-1\right)$
21. $f'(x) = \frac{-e^{x/2}}{x^2}$
22. $f'(x) = e^{x+e^x}$
23. $f'(x) = e^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(ln(x)+2)$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Puisque $\cos x \geq -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2 + \cos x > 0$. Le dénominateur ne s'annule pas, et f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On a
$$f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}=\frac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$$
puisque sin et cos sont 2π-périodiques. De plus, on a
$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{2+\cos x}=-f(x)$$
La fonction f est donc impaire. La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à l'origine du repère. De plus, par 2π-périodicité, on peut limiter l'étude à un intervalle de longueur 2π puis déduire la courbe représentative de f par des translations de vecteur $(2\pi,0)$. Il suffit donc d'étudier la fonction sur $[0,\pi]$, construire la courbe sur cet intervalle, l'obtenir sur $[-\pi,\pi]$ par symétrie par rapport à O, puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

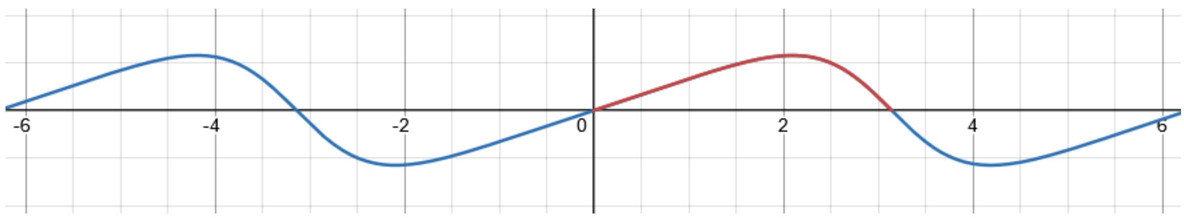
3. En utilisant la formule de dérivabilité d'un quotient, on a
$$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)-(-\sin x)(\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$$

4. On a $1+2\cos x\geq 0 \iff \cos x\geq -1/2$. En s'aidant du cerde trigonométrique, on trouve que $\cos x\geq -1/2$ sur $[0,2\pi/3]$ et $\cos x\leq -1/2\,\text{sur}[2\pi/3,\pi]$.

5. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

6. On trouve la courbe suivante :



Correction de l'exercice 7 ▲

cf correction manuscrite.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La fonction est bien définie pour les réels $x\neq 1$ tels que $-1\leq \frac{1+x}{1-x}\leq 1$. Or,
$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{2+x-1}{1-x}=\frac{2}{1-x}-1$$
On en déduit que

$$-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{2}{1-x} \leq 2$$

Ceci impose d'abord que $1-x>0$ pour que l'inégalité de gauche soit vérifiée, c'est-à-dire $x<1$. On en déduit alors que l'inégalité est équivalente à $1 \leq 1-x$ soit $x \leq 0$. Le domaine de définition de la fonction est donc $\mathbb{R}_-$. Son domaine de dérivabilité est $]-\infty,0[$. En effet, par composition, f est dérivable en tout réel $x \neq 1$ tel que $-1 < \frac{1+x}{1-x} < 1$ et l'étude précédente reste valable avec des inégalités strictes et non des inégalités larges.

2. Dérivons la fonction. Pour tout $x<0$, on a

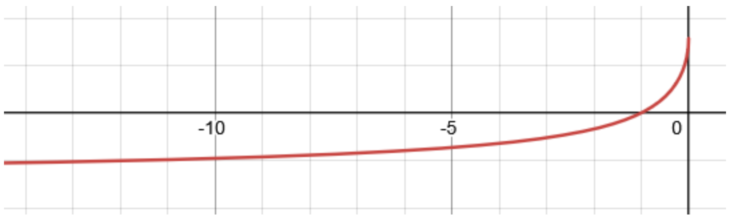
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-1-\frac{4}{(1-x)^2}+\frac{4}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}} > 0 \end{aligned}$$

3. La fonction est donc strictement croissante sur $]-\infty,0]$. On aurait pu également retrouver ce résultat en remarquant que la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est croissante sur $]-\infty,0]$ et que la fonction arcsin est croissante sur $]-1,1[$. Par composition de deux fonctions croissantes, f est croissante. Enfin, puisque

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1$$

on en déduit par composition que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/2$. La courbe représentative de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y=-\pi/2$.

4. On obtient la courbe représentative suivante :



Correction de l'exercice 9 ▲

La fonction $Argch$ est définie sur $[1,+\infty[$. Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x>0 \end{aligned}$$

donc f est définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $x>0$, alors $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1$ et on sait que

$$Argch(y) = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$$

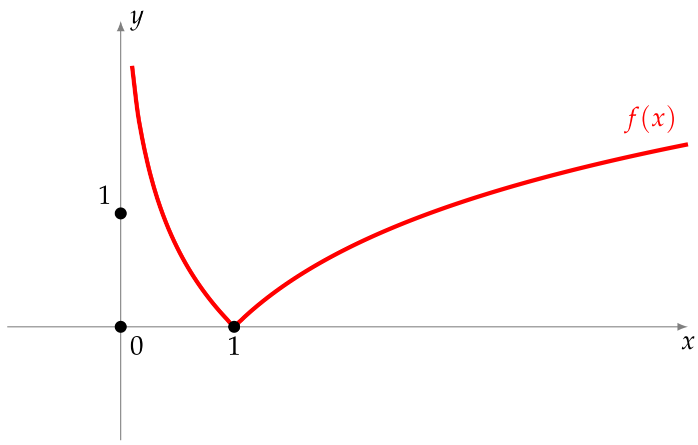
Ainsi

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{4x^2}-1} = \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}} = \left|\frac{x^2-1}{2x}\right|$$

on obtient
$$f(x) = Argch(y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x} + \left|\frac{x^2-1}{2x}\right|\right)$$
On a supposé $x > 0$, il suffit donc de distinguer les cas $x \geq 1$ et $0 < x \leq 1$.

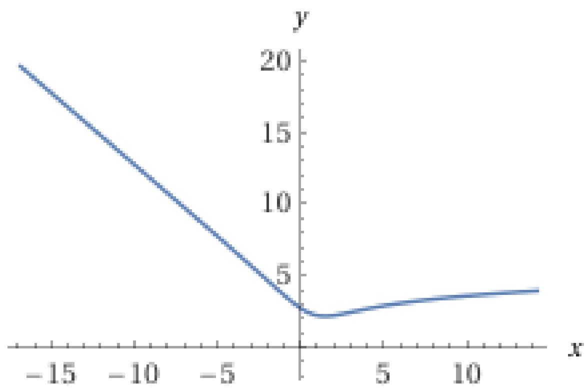
- Si $x \geq 1$, $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x} + \frac{x^2-1}{2x}\right) = \ln x$.
- Si $0 < x \leq 1$, $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x} + \frac{1-x^2}{2x}\right) = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$.

Puisque $\ln x$ est positif si $x \geq 1$ et négatif si $x \leq 1$, on obtient dans les deux cas $f(x) = |\ln x|$.



Correction de l'exercice 10 ▲

1. La fonction $Argsh$ est définie sur $\mathbb{R}$, de même que $u(x) = 2x + 8e^{-x}$. On a donc $D = \mathbb{R}$.
2. La dérivée de f est
$$f'(x) = \frac{2 - 8e^{-x}}{\sqrt{(2x + 8e^{-x})^2 + 1}}$$
3. On cherche
$$2 - 8e^{-x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq \ln(4)$$
Donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \leq \ln(4)$ et $f^(x) \geq 0$ pour $x \geq \ln(4)$.
On peut donc affirmer que f est croissante sur $[\ln(4); +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; \ln(4)]$
4. On a donc



Correction de l'exercice 11 ▲

1. En utilisant la dérivée de arctan et la dérivée d'une fonction du type $g(ax)$, on trouve que

$$f'(x) = a \times \frac{1}{1+a^2x^2}$$

2. Posons $g(x) = \frac{1}{4+x^2}$. On va se ramener à la question précédente en remarquant que

$$g(x) = \frac{1}{4\left(1+x^2/4\right)} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2} = \frac{1}{2} \times f'(x)$$

en choisissant $a = 1/2$. Une primitive de g est donc la fonction

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \cos^4(x) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\cos^4(x) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2\cos^4(x) \leq 1$$

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.

2.
$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x+2\pi)\right) = \operatorname{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x)\right) = f(x)$$

Donc f est 2π périodique.
Remarque : en fait f est même π-périodique.

$$f(-x) = \operatorname{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(-x)\right) = \operatorname{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x)\right) = f(x)$$

Donc f est paire. Par conséquent on étudiera f sur $I = [0, \pi]$.

3. On pose $u(x) = 1 - 2\cos^4(x)$, on a donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$$

or

$$u'(x) = 8\cos^3(x)\sin(x)$$

et

$$\begin{aligned}
1-(u(x))^2 &= 1 - \left(1 - 2\cos^4(x)\right)^2 \\
&= 1 - \left(1 - 4\cos^4(x) + 4\cos^8(x)\right) \\
&= 4\cos^4(x) - 4\cos^8(x) \\
&= 4\cos^4(x)\left(1-\cos^4(x)\right) \\
&= 4\cos^4(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\left(1+\cos^2(x)\right) \\
&= 4\cos^4(x)\sin^2(x)\left(1+\cos^2(x)\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{8\cos^3(x)\sin(x)}{\sqrt{4\cos^4(x)\sin^2(x)\,(1+\cos^2(x))}} \\
&= \frac{8\cos^3(x)\sin(x)}{2\cos^2(x)|\sin(x)|\sqrt{1+\cos^2(x)}} \\
&= \frac{8\cos(x)\sin(x)}{2|\sin(x)|\sqrt{1+\cos^2(x)}}
\end{aligned}
$$

Il y aura évidemment un problème en 0^+et en π^-. Et sur $]0,\pi[$, on a $\sin(x) > 0$ donc $|\sin(x)| = \sin(x)$. Finalement pour tout $x \in]0,\pi[$

$$
f'(x) = \frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}
$$

4. Sur $]0,\pi[, \sin(x) > 0$ et pour tout $x \in I, \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ D'après l'expression

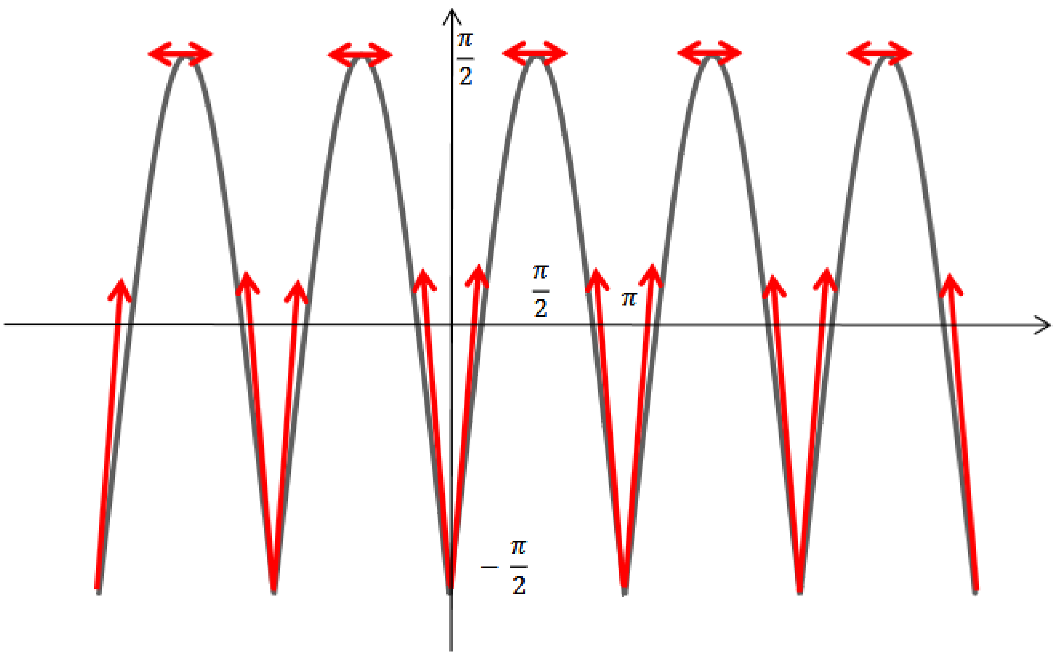
$$
f'(x) = \frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}
$$

$f'(x)$ a le même signe que $\cos(x)$, c'est-à-dire strictement positif sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et strictement négatif sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \operatorname{Arcsin}\left(1-2\cos^4(0)\right) = \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2} \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{Arcsin}\left(1-2\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2} \\
f(\pi) &= \operatorname{Arcsin}\left(1-2\cos^4(\pi)\right) = \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Donc f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

5. On a donc



Correction de l'exercice 13 ▲

1. $f(0) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{1+0^2}-0\right) + \mathrm{Arctan}(0) = 2\,\mathrm{Arctan}(1) = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
2. On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\times\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2} + \frac{1}{1+x^2}\\
&= 2\times\frac{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2\right)} + \frac{1}{1+x^2}\\
&= 2\times\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\left(2+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}\right)} + \frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2-x\sqrt{1+x^2}\right)} + \frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)} + \frac{1}{1+x^2}\\
&= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \qquad = 0
\end{aligned}$$

3. Sur $\mathbb{R}$ on a

$$f(x) = K$$

avec K une constante. Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x)\geq 1$ donc

$$0 < \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \leq 1$$

par conséquent f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Si $f(x) = \mathrm{Arcsin}(u(x))$ alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$$

avec $u(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$. On a

$$u'(x) = -\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

de plus

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^2} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(x)-1}{\mathrm{ch}^2(x)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}} = \frac{|\mathrm{sh}(x)|}{|\mathrm{ch}(x)|} = \frac{|\mathrm{sh}(x)|}{\mathrm{ch}(x)}$$

car $\mathrm{ch}(x) > 0$. Donc

$$f'(x) = -\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|}\times\frac{-1}{\mathrm{ch}(x)}$$

f n'est pas dérivable en $0. f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. C'est une manière rapide de dire que pour que f soit dérivable en un point, il faut et il suffit que f soit continue en ce point et que f' existe, ici, pour que f soit dérivable, il faut et il suffit que f' existe (car f est définie sur $\mathbb{R}$) et que manifestement la limite à gauche et à droite de 0 n 'est pas la même. Donc le raisonnement suivant : f est dérivable si et seulement si

$$-1 < \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} < 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

n'est pas correct.

3. $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$
4. Si $x > 0$ alors $\operatorname{sh}(x) > 0$ et donc

$$f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = -\frac{2}{e^x + e^{-x}} = -\frac{2e^x}{e^{2x}+1} = -2g'(x)$$

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

$$f(x) = -2g(x) + K$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{Arcsin}(0) = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(X) = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$K = \pi$$

Et

$$\forall x > 0, \quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) = -2\operatorname{Arctan}\left(e^x\right) + \pi$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On pose, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geq 0$$

Ainsi, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus, $f(0) = 0$, donc, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$ ce qui entraîne $\ln(1+x) \leq x$. Pour démontrer l'autre inégalité, on introduit cette fois la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$et pour tout $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$et $g(\mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$, donc pour tout $x \geq \mathbf{0}$,

$$g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. La fonction f est définie partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tout les x avec $\sin x \neq -1$. Le domaine de définition de f est donc

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. La foncttion f n'est ni paire, ni impaire, elle est par contre 2π périodique. On a

$$I = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

   Un intervalle d'amplitude 2π est suffisant pour avoir une répétition complete de la courbe de f.

3. On a $\sin(\pi - x) = \sin x$. On en déduit que $f(\pi - x) = f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x = \pi/2$ est un axe de symétrie pour la courbe de f. On peut donc se restreindre à l'intervalle

$$J = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

4. On a

$$\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$$

   de plus

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} 1 + \sin(x) = 0^+$$

   donc

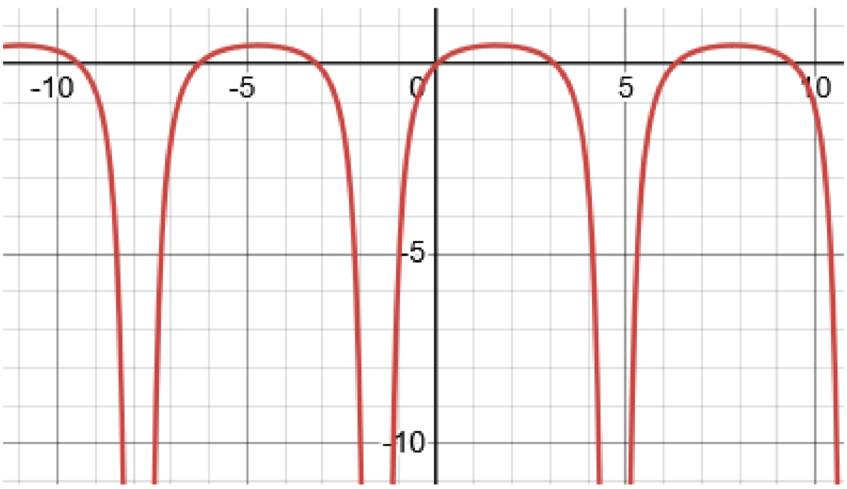
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$$

5. On a

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$$

6. Donc on trouve que f est croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

7. On a



Correction de l'exercice 17 ▲

1. f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0, \pi]$

2. $f'(x) = 2\cos(x)\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = 2\sin(x)\left(\cos(x) - \frac{1}{4}\right)$

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0,\pi]$, ce sont 0 et π.
Pour $x \in [0,\pi]\cos(x) = \frac{1}{4}$ équivaut à $x = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$, la fonction cos étant décroissante sur $[0,\pi]$ le signe de $\cos(x) - \frac{1}{4}$ est positif sur $\left[0, \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)\right]$ et négatif sur $\left[\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right), \pi\right]$.

x	0		$\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x) - \frac{1}{4}$		$+$	0	-	
$f'(x)$	0	$+$	0	-	0

f est croissante sur $\left[0, \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)\right]$
f est décroissante sur $\left[\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right), \pi\right]$
3.

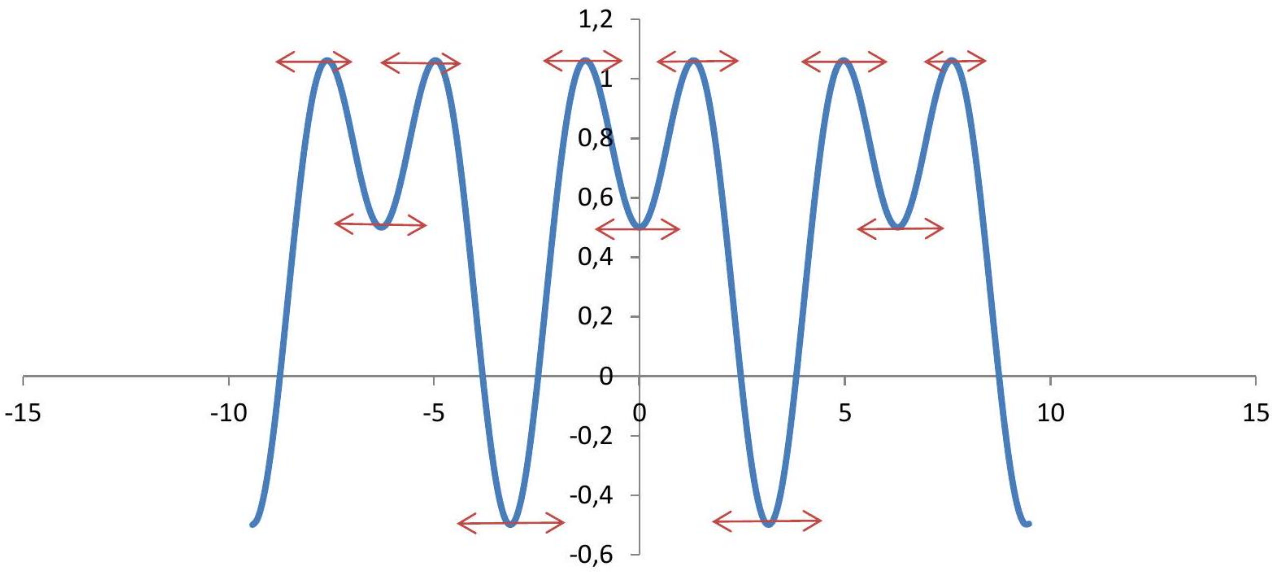
$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \sin^2\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 1 - \cos^2\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{16 - 1 + 2}{16} = \frac{17}{16}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{2}$$

x	0		$\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	-	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{17}{16}$		$-\frac{1}{2}$



Correction de l'exercice 18 ▲

1.

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{3}\cos(3(x+2\pi)) - \frac{3}{4}\cos(2(x+2\pi)) = \frac{1}{3}\cos(3x+6\pi) - \frac{3}{4}\cos(2x+4\pi)$$
$$= \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x) = f(x)$$

f est 2π périodique.

$$f(-x) = \frac{1}{3}\cos(-3x) - \frac{3}{4}\cos(-2x) = \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x) = f(x)$$

f est paire (et 2π périodique) donc on étudie f sur $[0,\pi]$.
2.

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) = e^{3ix} = \left(e^{ix}\right)^3 &= (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i\left(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right)\end{aligned}$$

Voir cours pour plus de détails. Puis on égalise les parties réelle et imaginaire

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$$
$$\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

C'est une formule connue.
3.

$$\begin{aligned}f'(x) = -\sin(3x) + \frac{3}{2}\sin(2x) &= -\left(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right) + 3\sin(x)\cos(x) \\ &= \sin(x)\left(-3\cos^2(x) + \sin^2(x) + 3\cos(x)\right) \\ &= \sin(x)\left(-3\cos^2(x) + 1 - \cos^2(x) + 3\cos(x)\right) \\ &= \sin(x)\left(-4\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1\right)\end{aligned}$$

Soit P le polynôme $P = -4X^2 + 3X + 1$, il admet 1 et $-\frac{1}{4}$ comme racine. On déduit que

$$P = -4(X-1)\left(X + \frac{1}{4}\right)$$

Et que

$$-4\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 = -4(\cos(x)-1)\left(\cos(x) + \frac{1}{4}\right)$$

Et la dérivée vaut

$$f'(x) = -4\sin(x)(\cos(x)-1)\left(\cos(x) + \frac{1}{4}\right)$$

La fonction cos étant décroissante sur $[0,\pi]$, $\cos(x) + \frac{1}{4}$ est positif sur $\left[0, \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$ et négatif sur $\left[\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\right]$.
Faisons un tableau de signe pour trouver le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x \in [0,\pi]$

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	+		+	0
$\cos(x) - 1$	0	-		-	
$\cos(x) + \frac{1}{4}$		+	0	-	
$\sin(x)(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$	0	-	0	+	0
$f'(x)$	0	+	0	-	0

f est croissante sur $\left[0, \text{Arccos}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$ et décroissante sur $\left[\text{Arccos}\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\right]$

4.

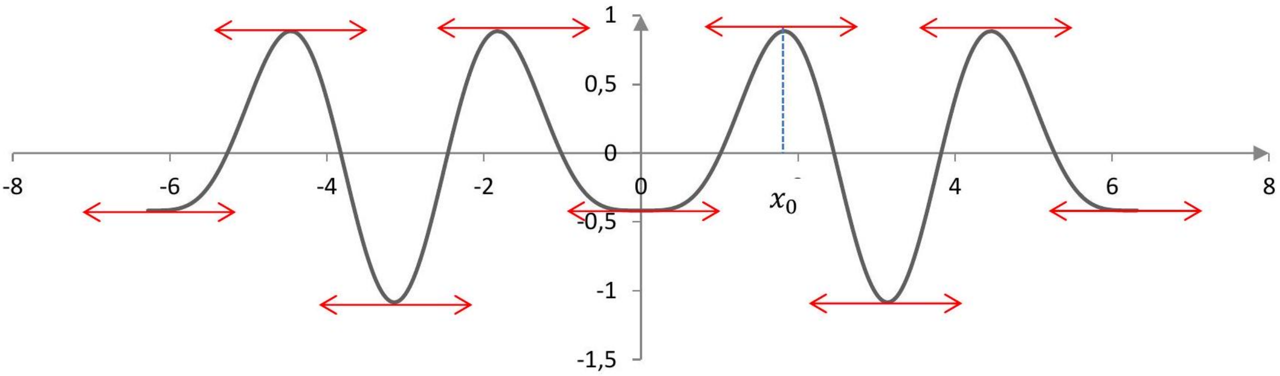
$$f(0) = \frac{1}{3}\cos(0) - \frac{3}{4}\cos(0) = -\frac{5}{12}$$
$$f(\pi) = \frac{1}{3}\cos(3\pi) - \frac{3}{4}\cos(2\pi) = -\frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{13}{12}$$
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x) &= \frac{1}{3}\left(\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)\right) - \frac{3}{4}\left(2\cos^2(x) - 1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\cos^3(x) - 3\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right)\right) - \frac{3}{4}\left(2\cos^2(x) - 1\right) \\ &= \frac{4}{3}\cos^3(x) - \frac{3}{2}\cos^2(x) - \cos(x) + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sachant que $\cos(x_0) = -\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} f(x_0) = \frac{4}{3}\cos^3(x_0) - \frac{3}{2}\cos^2(x_0) - \cos(x_0) + \frac{3}{4} &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{48} - \frac{3}{32} + 1 \\ &= \frac{-2 - 9 + 96}{96} = \frac{85}{96} \end{aligned}$$

5.

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	-	0
$f(x)$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{85}{96}$		$v_{-\frac{13}{12}}$



Correction de l'exercice 19 ▲

1. $f'(x) = 4 - 5\cos(x)$
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$ car $x \in [0, \pi]$, cos est une fonction décroissante donc
   Si $x \in \left[0, \text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)\right[$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante.
   Si $x \in \left]\text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right), \pi\right]$, $f'(x) > 0$ et f est croissante.

2. $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est trivial en élevant au carré. Comme arccos est une fonction décroissante :

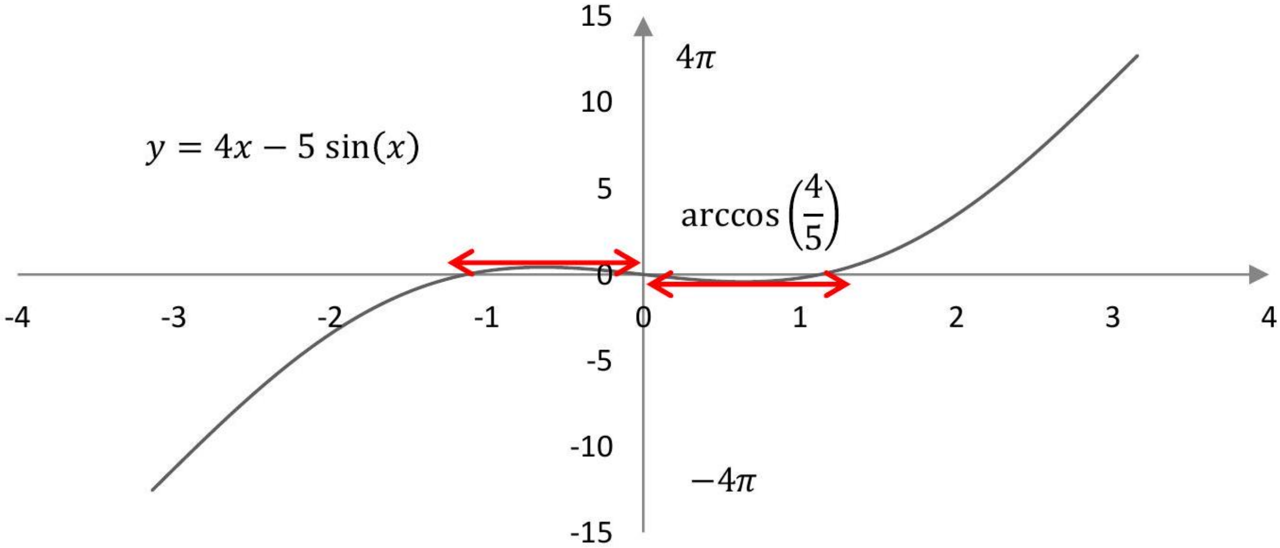
$$\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right) > \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} > \text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right) > \frac{\pi}{6}$$

3.

x	0	$\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$	π
$f'(x)$	-	0	$+$
$f(x)$	0	$4\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)-3$	

$$f\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)\right)=4\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)-5\sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)\right)=4\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)-5\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=4\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)-3$$

4. f est impaire donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine.



Correction de l'exercice 20 ▲

1. Ces trois nombres sont positifs, ces deux inégalités équivalent à

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{2}{3}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{1}{4}<\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$$

Ce qui est vrai.
2. arcsin est strictement croissante donc

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)<\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)<\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}<\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{\pi}{4}$$

3.

$$f'(x)=-\sin(x)+\frac{2}{3}$$
$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sin(x)=\frac{2}{3}$$

Dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x)=0$ admet une unique solution $x=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)$
Comme arcsin est strictement croissante,
$\forall x\in\left[0,\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)\right[, f'(x)>0$ donc f est strictement croissante
$\forall x\in\left]\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right),\frac{\pi}{2}\right], f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante

$$\frac{\pi}{6}<\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{9}<\frac{2}{3}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{\pi}{6}$$

Comme

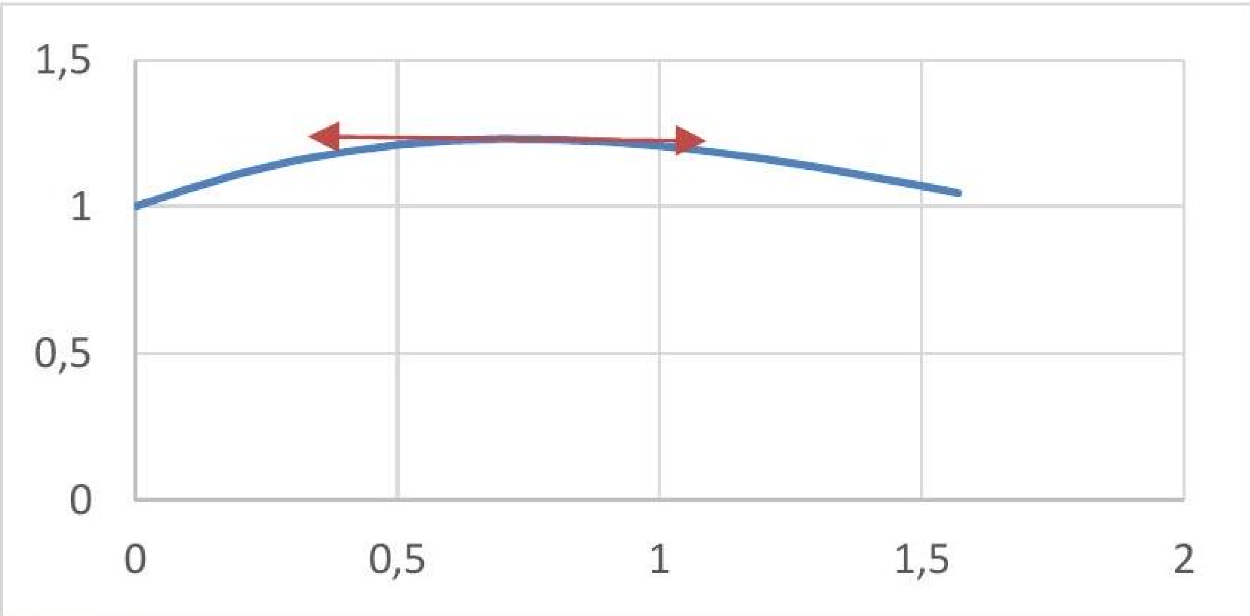
$$\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{9-4}{3^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Et que

$$f\left(\text{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)\right)+\frac{2}{3}$$

$$\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{5}}{3}<f\left(\text{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)\right)<\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{5}}{3}$$

4.



Correction de l'exercice 21 ▲

1. f est définie et continue si et seulement

$$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\in[-1,1]\\ 1-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-(\sqrt{1-x^2})^2\geq 0\\ x^2\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-(1-x^2)\geq 0\\ x\in[-1,1]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geq 0\\ x\in[-1,1]\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1,1]$$

2.

$$f'(x)=\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2}}=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

3.
Il y a deux demi-tangentes verticales
Pour $x<0, |x|=-x$ et

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to-1^+}f'(x)=+\infty$$

Il y a une demi-tangente verticale

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$$

Il y a une demi-tangente oblique
Pour $x > 0, |x| = x$ et

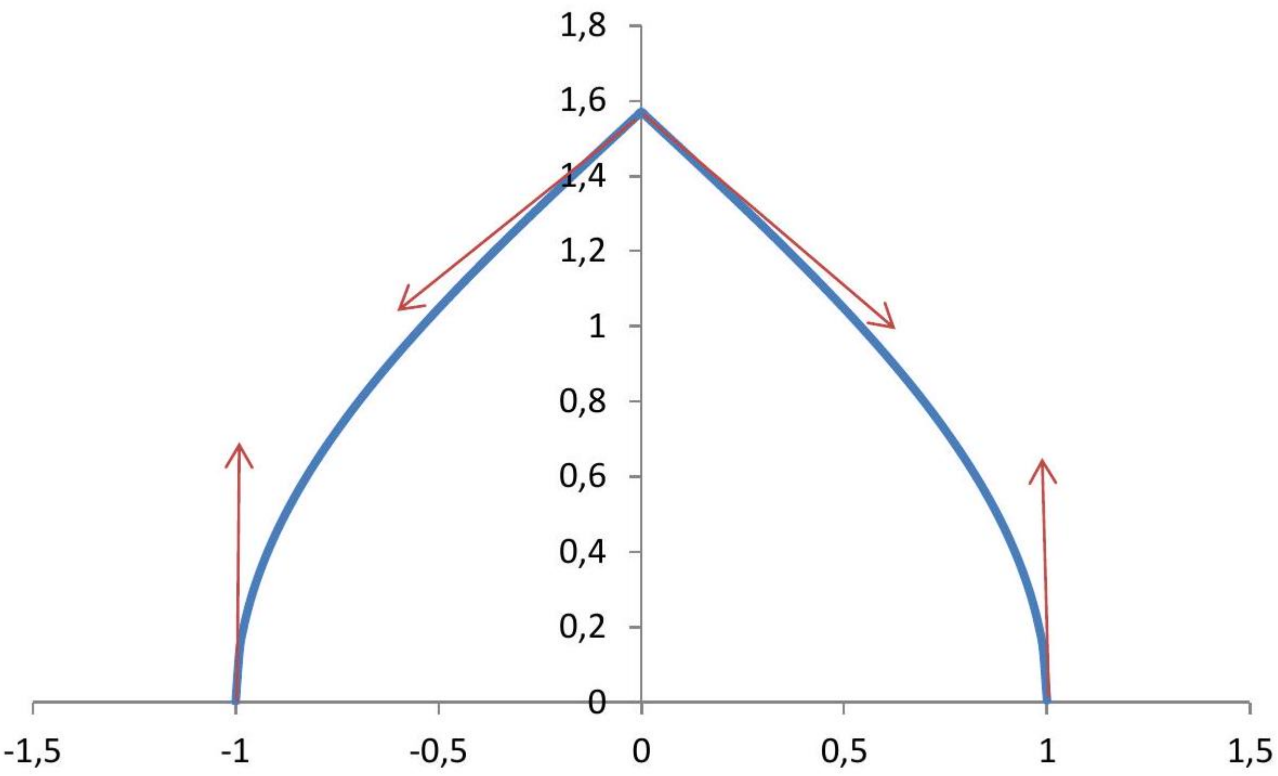
$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$$

Il y a une demi-tangente oblique

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$$

Il y a une demi-tangente verticale
4. Si $x \in [0,1]$ la fonction est croissante, si $x \in [0,1]$ la fonction est décroissante.
5.

x	-1		0		1	
$f'(x)$	$\|$	$+\infty$	$+1\|$	-1	-	$-\infty$
$f(x)$	0	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$		$\frac{\pi}{2}$ 0	



Correction de l'exercice 22 ▲

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \cos^4(x) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\cos^4(x) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2\cos^4(x) \leq 1$$

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.
2.

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x + 2\pi)\right) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x)\right) = f(x)$$

Donc f est 2π périodique.
Remarque : en fait f est même π-périodique.

$$f(-x) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(-x)\right) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x)\right) = f(x)$$

Donc f est paire.
Par conséquent on étudiera f sur $I = [0, \pi]$.
3. On pose $u(x) = 1 - 2\cos^4(x)$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$
$$u'(x) = 8\cos^3(x)\sin(x)$$
$$1 - (u(x))^2 = 1 - \left(1 - 2\cos^4(x)\right)^2 = 1 - \left(1 - 4\cos^4(x) + 4\cos^8(x)\right) = 4\cos^4(x) - 4\cos^8(x)$$
$$= 4\cos^4(x)\left(1 - \cos^4(x)\right) = 4\cos^4(x)\left(1 - \cos^2(x)\right)\left(1 + \cos^2(x)\right)$$
$$= 4\cos^4(x)\sin^2(x)\left(1 + \cos^2(x)\right)$$
$$f'(x) = \frac{8\cos^3(x)\sin(x)}{\sqrt{4\cos^4(x)\sin^2(x)\,(1 + \cos^2(x))}} = \frac{8\cos^3(x)\sin(x)}{2\cos^2(x)|\sin(x)|\sqrt{1 + \cos^2(x)}}$$
$$= \frac{8\cos(x)\sin(x)}{2|\sin(x)|\sqrt{1 + \cos^2(x)}}$$

Il y aura évidemment un problème en 0^+et en π^-. Et sur $]0, \pi[, \sin(x) > 0$ donc $|\sin(x)| = \sin(x)$ Finalement pour tout $x \in]0, \pi[$

$$f'(x) = \frac{4\cos(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}}$$

4.

$$f'(x) = \frac{4\cos(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{4}{\sqrt{1 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$
$$f'(x) = \frac{4\cos(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}} \underset{x \to \pi^-}{\longrightarrow} \frac{-4}{\sqrt{1 + 1^2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

Pour toutes les autres valeurs de I, f est dérivable, par conséquent f est dérivable sur $]0, \pi[$.
5. Sur $]0, \pi[, \sin(x) > 0$ et pour tout $x \in I, \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
D'après l'expression

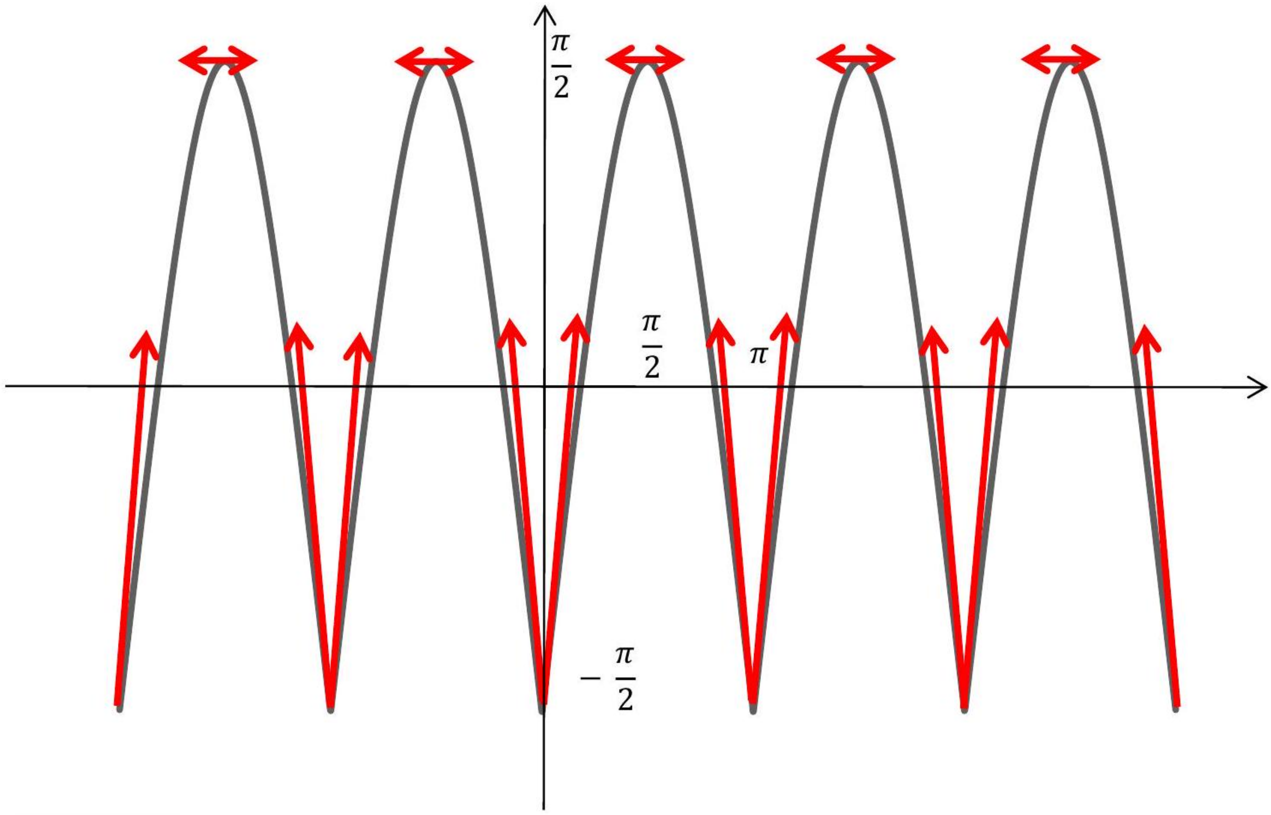
$$f'(x) = \frac{4\cos(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}}$$

$f'(x)$ a le même signe que $\cos(x)$, c'est-à-dire strictement positif sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et strictement négatif sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

$$f(0) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(0)\right) = \text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$$
$$f(\pi) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(\pi)\right) = \text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	
$f'(x)$		$+$	0	-
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	π	

6.



Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur Google Play et l'App Store.

Etudiez en musique !

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

D'après un cours de Arnaud Bodin.
Revu et augmenté par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).