Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Travaux dirirgés

Promotion 115

Exercice 1 Optimisation microclimatique d'une culture de vanille

Dans une exploitation de vanilliers à Madagascar, les plants grandissent sous une ombrière artificielle. Un ingénieur agronome cherche à modéliser l'impact combiné de l'indice de canopée de l'ombrière (noté x) et de l'irrigation par aspersion (notée y) sur deux facteurs bioclimatiques critiques au niveau du sol : la température ambiante T (en °C) et le taux d'humidité relative H (en %).

L'état du microclimat est défini par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui, à chaque couple d'actions de l'exploitant (x, y), associe les conditions mesurées (T, H) :

$$f(x,y) = (T(x,y)\,,\, H(x,y)) = \left(35 - 2x - \frac{1}{2}y \quad , \quad 40 + 5x^2 + xy\right)$$

1. *Calcul de la matrice jacobienne directe*
   (a) Rappeler la définition de la matrice jacobienne d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer les expressions des quatre dérivées partielles de premières ordre :
   $$\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial y}$$
   (c) En déduire l'expression de la matrice jacobienne $J_f(x, y)$.
   (d) L'exploitation est actuellement réglée sur un indice d'ombrage $x = 2$ et un volume d'irrigation $y = 10$. Si l'agronome décide d'augmenter légèrement l'indice d'ombrage x de $+0,1$ unité tout en laissant l'irrigation constante ($\Delta y = 0$), estimer l'impact approximatif de cette action sur la température T et l'humidité H à l'aide de la matrice jacobienne.
2. *Approche par composition*

   Pour automatiser la gestion de la plantation, l'irrigation y et l'ombrage x sont asservis à un seul paramètre : l'indice d'ensoleillement global de la journée, noté t (exprimé en heures de soleil direct, où $t \in [0, 12]$).

   Les agronomes ont établi la fonction de contrôle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par :
   $$g(t) = (x(t)\,,\, y(t)) = \left(\frac{1}{4}t\,,\, t^2\right)$$
   On s'intéresse à la fonction composée $h(t) = f(g(t))$, qui donne directement la température et l'humidité en fonction de l'ensoleillement de la journée t.
   (a) Calculer la matrice jacobienne $J_g(t)$.
   (b) En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées, déterminer l'expression de la matrice jacobienne $J_h(t)$ en fonction de t.
   (c) *Vérification :* Exprimer directement T et H en fonction de la variable unique t, puis dériver chaque composante de manière classique pour confirmer votre résultat précédent.

Correction ▼ [06.0001]

Exercice 2 Optimisation du rendement d'une culture de café

Dans une coopérative agricole sur les hauts plateaux de l'Est africain, un ingénieur agronome cherche à maximiser le rendement annuel d'une parcelle de caféiers. Deux facteurs écologiques majeurs sont étudiés pour leur impact combiné sur la production :

- x : la densité de l'ombrage fourni par les arbres (exprimée sur une échelle de 0 à 5).
- y : la quantité d'azote organique apportée par le compost (exprimée en centaines de kg par hectare, sur une échelle de 0 à 5).

Le rendement de la parcelle, noté $R(x,y)$ (en tonnes de café vert par hectare), est modélisé par la fonction à deux variables suivante :

$$R(x,y) = -x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4xy - 2x$$

1. *Recherche des points critiques*
   (a) Déterminer les expressions des deux dérivées partielles premières,
   $$\frac{\partial R}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial R}{\partial y}(x,y)$$
   (b) Rappeler la définition d'un point critique (candidat) pour une fonction de deux variables. Montrer que la recherche des points critiques de R conduit à résoudre le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} -3x^2 + 6x + 4y - 2 = 0 \\ -4y + 4x = 0 \end{cases}$$
   (c) Résoudre ce système pour déterminer les deux points critiques de la fonction R, que l'on notera A et B (avec $x_A < x_B$).
2. *Étude de la matrice hessienne et valeurs propres*
   (a) Rappeler la définition d'une matrice Hessienne pour une fonction de deux variables.
   (b) Calculer les dérivées partielles secondes de R et donner l'expression de la matrice hessienne $H_R(x,y)$ en un point quelconque (x,y).
   (c) Analyse des point critique A et B
      i. Calculer les matrices hessienne aux point A et B, notée $H_R(A)$ et $H_R(B)$.
      ii. Déterminer les valeurs propres de ces deux matrices.
      iii. En déduire la nature des points critiques A et B.
3. Donner les valeurs optimales de l'ombrage x et de l'apport d'azote y recommandées par le modèle, ainsi que le rendement maximal théorique associé.

Correction ▼ [06.0002]

Exercice 3 Dynamique d'irrigation et dispersion des sédiments

Dans le cadre d'un aménagement hydro-agricole le long du fleuve Niger, une coopérative de producteurs de riz utilise un grand canal d'irrigation à ciel ouvert. L'ingénieur agronome de la station souhaite modéliser deux phénomènes majeurs :

1. La topographie de la hauteur d'eau pour éviter les zones d'eau stagnante.
2. Le vecteur vitesse de l'eau (V) pour analyser les risques d'ensablement (dépôt de sédiments) et d'érosion des berges.

On modélise la zone du canal par un domaine de $\mathbb{R}^3$. Un point de l'écoulement est repéré par ses coordonnées (x,y,z) où x représente le sens de la longueur du canal, y sa largeur et z la hauteur d'eau.

1. *Topographie et Opérateur Gradient*

   Le profil de la hauteur d'eau résiduelle (en mètres) dans une section du canal est modélisé par un champ (fonction) scalaire $H(x,y)$ défini par :
   $$H(x,y) = 2x^2e^{-y} + 3x$$

(a) Déterminer le gradient de la fonction H.

(b) Calculer le vecteur gradient au point $A(1,0)$, correspondant à l'entrée d'une vanne de régulation.

(c) L'ingénieur se place au point A. S'il souhaite déplacer la vanne pour l'installer là où la hauteur d'eau augmente le plus rapidement, dans quelle direction (selon quel vecteur) doit-il orienter son déplacement ?

2. *Flux d'eau et Opérateur Divergence*

Le champ des vitesses de l'eau dans le canal d'irrigation est représenté par le champ vectoriel $V(x,y,z)$ suivant (exprimé en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) :

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ -xy^2 \\ 2z \end{pmatrix}$$

La compressibilité d'un ecoulement d'un fluide est caractérisé par la divergence du champ des vitesses.

- Si $\mathrm{div}(V) = 0$, alors l'*écoulement est incompressible*. Le volume d'une particule de fluide reste rigoureusement constant au cours du temps.
- Si $\mathrm{div}(V) \neq 0$, alors l'*écoulement est compressible*.

(a) Rappeler la relation de la divergence d'un champ (fonction) vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, puis calculer $\mathrm{div}(V)$.

(b) Calculer la valeur numérique de la divergence au point $B(1,2,5)$.

(c) L'eau du canal est-elle localement compressible ou incompressible en ce point ? S'il y a des sédiments fins en suspension dans l'eau, un point où $\mathrm{div}(V) > 0$ favorise-t-il le dépôt de boue ou l'évacuation des sédiments ?

3. *Tourbillons et Opérateur Rotationnel*

Dans les virages du canal d'irrigation, des rides de courant et des tourbillons peuvent se former, ce qui perturbe l'écoulement. On étudie le même champ vectoriel de vitesse V.

Un écoulement est irrotationnel si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$. Le vecteur rotationnel mesure la tendance des particules de fluide à tourner sur elles-mêmes (la vitesse angulaire locale) autour de leur propre centre de gravité au cours du mouvement. Là où l'écoulement est irrotationnel, l'énergie cinétique de l'eau est dissipée sous forme de frottements visqueux et de micro-tourbillons. Ici cela signifie que le canal perd de sa "force" motrice. Si le canal est trop long et trop rotationnel, l'eau finira par stagner et n'arrivera plus aux parcelles de riz avec le débit suffisant.

(a) Rappeler la relation du rotationnel d'un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer le rotationnel de V.

(c) Existe-t-il des zones dans le canal où l'écoulement est qualifié d'« irrotationnel ? Si oui, à quelle condition sur x et y ?

(d) Pourquoi la présence d'un rotationnel non nul aux bords du canal (y proche des berges) est-elle une information critique pour l'ingénieur agronome concernant la durabilité des infrastructures en terre ?

Correction ▼ [06.0003]

Exercice 4 Aménagement de rizières en terrasses au Nagaland

Dans les zones montagneuses du Nord-Est de l'Inde, la population a développé un savoir-faire ancestral de riziculture en terrasses. Pour que l'eau stagne correctement dans les parcelles de riz sans dévaler la pente et provoquer une érosion sévère des sols tropicaux lors des moussons, les digues des terrasses doivent impérativement suivre les courbes d'égal niveau (lignes d'altitude constante).

Un ingénieur agronome modélise le relief d'une colline par une fonction d'altitude $z = f(x,y)$ (en dizaines de mètres) définie par :

$$f(x,y) = 12 - x^2 - 2y^2$$

où x représente l'axe Ouest-Est et y l'axe Sud-Nord au sol.

1. *Géométrie du terrain et lignes de niveau*

   (a) Rappeler la définition d'une ligne de niveau L_c pour une fonction de deux variables.

   (b) Déterminer l'équation de la ligne de niveau L_8 correspondant à l'altitude $z = 8$ (soit 80 mètres). Quelle est la nature géométrique de cette courbe ?

   (c) *Pente maximale*

      i. Calculer le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y)$ en un point quelconque du domaine.

      ii. Un technicien agricole se trouve au point $A(2, 1)$. Calculer le vecteur numérique $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(2, 1)$.

      iii. Si l'eau de mousson ruisselle à partir du point A, elle suit la ligne de plus grande pente vers le bas (l'opposé du gradient). Donner le vecteur directeur de la trajectoire naturelle de l'eau au point A.

   (d) Montrer que le vecteur gradient au point $A(2, 1)$ est orthogonal à la tangente de la ligne de niveau passant par A. Pourquoi est-ce une propriété fondamentale pour l'ingénieur qui conçoit le système d'irrigation ?

2. *Optimisation sous contrainte (Réseau d'alimentation)*

   Pour alimenter les rizières par gravité lors de la saison sèche, la coopérative locale doit installer un bassin de rétention d'eau sur la colline. Cependant le bassin doit obligatoirement être construit le long d'un canal de distribution rectiligne dont l'équation au sol est :

   $$x + 2y = 3$$

   On cherche à trouver le point le plus haut de la colline situé sur cette droite pour y placer le réservoir, afin de maximiser la pression naturelle de distribution de l'eau vers l'aval.

   (a) À l'aide de la contrainte linéaire, exprimer la variable x en fonction de y.

   (b) Injecter cette expression dans la fonction $f(x, y)$ pour obtenir une fonction $h(y)$ à une seule variable.

   (c) Dériver la fonction $h(y)$, trouver son maximum .

   (d) En déduire les coordonnées au sol optimales (x_R, y_R) du réservoir ainsi que l'altitude maximale z_R atteignable.

Correction ▼ [06.0004]

Exercice 5 Modélisation de l'indice de pullulation du criquet au Sahel

Dans les zones semi-arides du Niger, les invasions de criquets représentent une menace majeure pour la sécurité alimentaire des populations locales. Un centre de recherche agronomique modélise un *Indice de pullulation*, noté $I(x, y)$, en fonction de deux variables environnementales clés :

- x : l'indice d'humidité du sol (directement lié aux précipitations récentes), $x \in \mathbb{R}$.
- y : l'indice de verdissement de la végétation basse (source de nourriture et de refuge), $y \in \mathbb{R}$).

Le modèle retenu pour décrire cette interaction non linéaire est le suivant :

$$I(x, y) = (2x - y^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. *Calcul du Gradient et Points Critiques*

   (a) Calculer le gradient de $I(x, y)$.

   (b) Justifier brièvement que l'annulation du gradient de $I(x, y)$ revient à résoudre le système non linéaire suivant :

   $$\begin{cases} 2 - 2x^2 + xy^2 = 0 \\ y(y^2 - 2x - 2) = 0 \end{cases}$$

   (c) Déterminer l'existence de deux points critiques que l'on nommera A et B (avec $x_A > x_B$).

2. *Matrice Hessienne et Valeurs Propres*

   On souhaite étudier la nature des points critiques.

(a) Calculer la matrice Hessienne de $I(x, y)$
(b) Evaluer la matrice Hessienne au points A et B.
(c) Déterminer les valeurs propres de ces deux matrices.
(d) Conclure sur la nature géométrique et biologique de ces deux points pour la gestion des criquets au Sahel.

Correction ▼ [06.0005]

Exercice 6 Aménagement hydro-agricole par buttage au Karnataka

Dans une exploitation agricole de la région de Mysore (Inde du Sud), un ingénieur agronome conçoit des billons (petites buttes de terre surélevées séparées par des sillons) afin d'optimiser l'irrigation par ruissellement lors des cultures maraîchères.

Le relief de la parcelle est modélisé par une fonction d'altitude $z = f(x, y)$ (exprimée en décimètres) définie pour tout point (x, y) du sol par :

$$f(x, y) = \left(y - x^2\right)^3 - 1$$

L'axe x représente la largeur de la parcelle et l'axe y correspond à sa longueur.

1. Forme géométrique des aménagements (Lignes de niveau)

   Pour éviter que l'eau de mousson ne s'écoule de manière incontrôlée et n'emporte les nutriments, l'ingénieur doit tracer des diguettes de retenue qui suivent des courbes d'égal niveau (altitude constante $z = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

   Montrer que pour toute altitude $\lambda \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau $\mathscr{C}_\lambda$ est une parabole dont on exprimera l'ordonnée y en fonction de x.

2. Étude des pentes du terrain (Gradient)

   Pour comprendre comment le relief varie localement, l'agronome doit analyser le comportement des pentes du sol.

   Déterminer les expressions des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, puis en déduire l'expression du vecteur gradient $\nabla f(x, y)$.

3. Modélisation du ruissellement de l'eau

   On se place en un point donné de la parcelle $A(x_0, y_0)$ situé précisément sur une diguette d'altitude λ (on a donc $A \in \mathscr{C}_\lambda$).

   (a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente à la ligne de niveau $\mathscr{C}_\lambda$ en ce point $A(x_0, y_0)$.
   (b) Montrer que ce vecteur directeur $\vec{u}$ est rigoureusement orthogonal au vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$.
   (c) Quel est l'intérêt concret de cette propriété d'orthogonalité pour l'ingénieur qui cherche à retenir l'eau sur sa parcelle au Karnataka ?

Correction ▼ [06.0006]

Exercice 7 Optimisation d'un modèle d'agroforesterie étagée dans la Cordillère des Andes (Colombie)

Dans les montagnes de la région d'Antioquia en Colombie, une coopérative de caféiculteurs cherche à adapter ses pratiques agricoles face au changement climatique. Un ingénieur agronome modélise un *Indice de vulnérabilité parasitaire* (notamment face à la rouille du caféier[1]), noté $f(x, y, z)$, au sein de différentes parcelles expérimentales.

Cet indice dépend de trois facteurs majeurs manipulés ou subis par les producteurs :

- x : l'altitude de la parcelle (mesurée en centaines de mètres au-dessus du seuil critique de 1 200 m).

[1] La rouille du caféier, ou rouille des feuilles du caféier, est une maladie fongique qui affecte les caféiers causée par des champignons. Elle est répandue dans toutes les régions caféicoles du monde.

- y : la densité de bananiers (utilisés pour maintenir l'humidité et ombrager les caféiers).

- z : la dose d'amendements organiques et de bio-fertilisants appliqués au sol.

Le modèle établit la fonction d'indice suivante sur $\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz + y - z$$

L'objectif est de cartographier mathématiquement ce comportement afin de déterminer si la coopérative peut stabiliser la vulnérabilité de la plantation (atteindre un minimum) ou s'il existe un point de bascule critique.

1. Cartographie des interactions (Calcul du Gradient)

   (a) Déterminer les expressions des trois dérivées partielles premières de la fonction f, à savoir $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

   (b) Montrer que le seul point de configuration de la plantation où l'indice de vulnérabilité ne subit aucune variation locale immédiate (le point critique où le gradient s'annule) se situe aux coordonnées $A(1\,;1\,;-1)$.

2. Analyse de la stabilité éco-agricole

   (a) Déterminer les expressions des six dérivées partielles secondes de la fonction f et écrire la matrice hessienne générale $H_f(x,y,z)$.

   (b) Montrer que la matrice hessienne numérique évaluée au point critique A s'écrit :

$$H_f(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) Développer le déterminant de l'équation caractéristique $P(\lambda) = \det\Big(H_f(A) - \lambda I_3\Big) = 0$ et montrer qu'il conduit à l'équation polynomiale suivante :

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3) = 0$$

   (b) En déduire les trois valeurs propres exactes λ_1, λ_2 et λ_3 de cette matrice hessienne.

   (c) Au vu des signes des valeurs propres obtenues, le point A correspond-il à un minimum de vulnérabilité (situation idéale recherchée), un maximum de vulnérabilité (scénario catastrophe) ou un point de bascule instable (point selle) ? La fonction f admet-elle des extremums sur $\mathbb{R}^3$?

Correction ▼ [06.0007]

Exercice 8 Modélisation hydro-dynamique d'un bassin versant à Macouria (Guyane)

Lors des précipitations intenses caractérisant la grande saison des pluies en Guyane française, le ruissellement de l'eau sur les sols en pente représente un risque majeur de lessivage des nutriments et de destruction mécanique des planches de cultures (comme le manioc ou la patate douce).

Un ingénieur agronome étudie une parcelle de ce bassin versant située dans la commune de Macouria. Dans un repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^3$, il modélise :

- Le relief du terrain par une fonction scalaire d'altitude $h(x,y)$ (exprimée en mètres).

- Le flux de ruissellement de l'eau chargée de sédiments à la surface du sol par un champ vectoriel $F(x,y,z)$, dont les composantes décrivent la vitesse locale du fluide (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$).

La topographie de la pente est décrite par la fonction :

$$h(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

La dynamique du fluide de surface est modélisée par le champ vectoriel :

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y \\ -xy^2 \\ z(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

1. Topographie et lignes de fuite (Le Gradient) L'eau de pluie s'écoule naturellement en suivant les lignes de plus grande pente du relief, dictées par les variations locales de l'altitude.
   (a) Déterminer les expressions des dérivées partielles premières $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$.
   (b) En déduire l'expression formelle du vecteur gradient $\nabla h(x,y)$.
   (c) Un capteur de turbidité[2] est placé au point de coordonnées $A(1\,;\,2)$. Calculer le vecteur gradient numérique au point A. Sachant que l'eau descend la pente de manière opposée au gradient, donner les composantes du vecteur directeur de l'écoulement de l'eau au point A.
2. Distorsion du flux de sédiments (Le Jacobien) Pour analyser la façon dont le courant d'eau se déforme, s'étire et cisaille les particules de terre arable, l'ingénieur étudie les variations croisées du champ des vitesses F.
   (a) Rappeler la structure mathématique générale de la matrice jacobienne $J_F(x,y,z)$ pour un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer les 9 dérivées partielles associées et dresser la matrice jacobienne générale $J_{\vec{F}}(x,y,z)$.
3. Analyse du comportement hydraulique (Divergence et Rotationnel) Afin de concevoir des aménagements anti-érosifs efficaces, l'ingénieur doit repérer les zones d'accumulation d'eau et les zones de fortes turbulences.
   (a) La Divergence (Zones d'accumulation vs Érosion).
      i. Calculer la divergence du champ de ruissellement, notée $\text{div}(F)$.
      ii. Montrer que cette divergence correspond exactement à la *trace* (la somme des éléments de la diagonale principale) de la matrice jacobienne calculée précédement.
      iii. En analysant le signe de $\text{div}(F)$, délimiter sur la parcelle la zone géographique (relation liant x et y) où le fluide converge (accumulation d'eau / dépôt de sédiments) et celle où il diverge (accélération / érosion par arrachement des sols).
   (b) Le Rotationnel (Formation de tourbillons) :
      i. Calculer le vecteur rotationnel du champ, noté $\text{rot}(F)$.
      ii. Un jeune plant de manioc est situé au point de contrôle $B(1\,;\,1\,;\,2)$. Calculer le vecteur rotationnel numérique au point B.
      iii. Le flux de ruissellement est-il irrotationnel en ce point ? Quel risque cela fait-il peser sur la structure racinaire du plant ?

Correction ▼ [06.0008]

[2] La turbidité est la mesure de l'aspect plus ou moins trouble de l'eau.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Calcul de la matrice jacobienne directe

   (a) Définition de la matrice jacobienne :
   Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à un couple (x,y) associe deux fonctions composantes $\big(T(x,y), H(x,y)\big)$, la matrice jacobienne $J_f(x,y)$ est la matrice de dimension 2×2 constituée de l'ensemble de ses dérivées partielles premières. Chaque ligne correspond au gradient d'une des fonctions de sortie :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

   (b) Calcul des quatre dérivées partielles premières :

   - Pour la fonction température $T(x,y) = 35 - 2x - \dfrac{1}{2}y$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{2}$$

   - Pour la fonction taux d'humidité $H(x,y) = 40 + 5x^2 + xy$:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 10x + y \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = x$$

   (c) Expression de la matrice jacobienne $J_f(x,y)$:
   En regroupant les composantes calculées, on obtient :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & -\dfrac{1}{2} \\ 10x + y & x \end{pmatrix}$$

   (d) Estimation de l'impact d'une variation :
   On évalue d'abord la matrice jacobienne numérique aux conditions initiales $x = 2$ et $y = 10$:

$$J_f(2,10) = \begin{pmatrix} -2 & -0{,}5 \\ 10(2) + 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -0{,}5 \\ 30 & 2 \end{pmatrix}$$

   L'agronome applique les variations $\Delta x = 0{,}1$ et $\Delta y = 0$. Par approximation linéaire locale au premier ordre (différentielle totale), on a :

$$\begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta H \end{pmatrix} \approx J_f(2,10) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta H \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 & -0{,}5 \\ 30 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   En effectuant le produit matriciel, on isole les variations :

$$\Delta T \approx (-2) \times 0{,}1 + (-0{,}5) \times 0 = -0{,}2\ ^\circ\text{C}$$

$$\Delta H \approx 30 \times 0{,}1 + 2 \times 0 = +3\,\%$$

   Une augmentation de 0,1 point de l'indice d'ombrage provoquera une baisse de température d'environ 0,2 °C et une hausse de l'humidité relative de 3 % au niveau des vanilliers.

2. Approche par composition

   (a) Calcul de la matrice jacobienne $J_g(t)$:
   La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ n'admet qu'une seule variable d'entrée (t). Sa matrice jacobienne est donc un vecteur colonne de dimension 2×1 contenant les dérivées ordinaires de ses composantes :

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt}(t) \\ \dfrac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{4}t\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(t^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ 2t \end{pmatrix}$$

(b) Dérivation par la règle de composition :

La règle différentielle énonce que la matrice jacobienne de la fonction composée $h = f \circ g$ s'obtient par le produit matriciel des matrices jacobiennes des fonctions individuelles :

$$J_h(t) = J_f\big(g(t)\big) \cdot J_g(t)$$

Exprimons d'abord $J_f\big(g(t)\big)$ en remplaçant x par $\frac{1}{4}t$ et y par t^2 dans l'expression trouvée précédement :

$$J_f\big(g(t)\big) = \begin{pmatrix} -2 & -\dfrac{1}{2} \\ 10\left(\dfrac{1}{4}t\right) + t^2 & \dfrac{1}{4}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{2}t + t^2 & \dfrac{1}{4}t \end{pmatrix}$$

Effectuons maintenant le produit matriciel $J_f\big(g(t)\big) \cdot J_g(t)$:

$$J_h(t) = \begin{pmatrix} -2 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{2}t + t^2 & \dfrac{1}{4}t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ 2t \end{pmatrix}$$

Calculons le vecteur ligne par ligne :

- *Première ligne (Température) :*

$$(-2) \times \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2t = -\frac{1}{2} - t$$

- *Deuxième ligne (Humidité) :*

$$\left(\frac{5}{2}t + t^2\right) \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}t\right) \times 2t = \frac{5}{8}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{5}{8}t + \frac{3}{4}t^2$$

On obtient l'expression finale de la matrice jacobienne de la fonction composée :

$$J_h(t) = \begin{pmatrix} -t - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4}t^2 + \dfrac{5}{8}t \end{pmatrix}$$

(c) Vérification par substitution directe :

Injectons directement les expressions $x(t) = \dfrac{1}{4}t$ et $y(t) = t^2$ dans les définitions initiales de T et H :

- *Expression de $T(t)$:*

$$T(t) = 35 - 2\left(\frac{1}{4}t\right) - \frac{1}{2}(t^2) = 35 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$$

En dérivant classiquement par rapport à t, on trouve :

$$\frac{dT}{dt}(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2t) = -t - \frac{1}{2}$$

- *Expression de $H(t)$:*

$$H(t) = 40 + 5\left(\frac{1}{4}t\right)^2 + \left(\frac{1}{4}t\right)(t^2) = 40 + \frac{5}{16}t^2 + \frac{1}{4}t^3$$

En dérivant classiquement par rapport à t, on trouve :

$$\frac{dH}{dt}(t) = \frac{5}{16}(2t) + \frac{1}{4}(3t^2) = \frac{5}{8}t + \frac{3}{4}t^2$$

En réunissant ces deux dérivées dans la matrice jacobienne $J_h(t)$, on constate :

$$J_h(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dT}{dt} \\ \dfrac{dH}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4}t^2 + \dfrac{5}{8}t \end{pmatrix}$$

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont rigoureusement identiques, ce qui valide la justesse des calculs différentiels.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Recherche des points critiques

   (a) Calcul des dérivées partielles premières :
   On dérive la fonction de rendement $R(x,y) = -x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4xy - 2x$ successivement par rapport à ses deux variables indépendantes :

   $$\frac{\partial R}{\partial x}(x,y) = -3x^2 + 6x - 0 + 4y - 2 = -3x^2 + 6x + 4y - 2$$

   $$\frac{\partial R}{\partial y}(x,y) = 0 + 0 - 4y + 4x - 0 = -4y + 4x$$

   (b) Définition d'un point critique et mise en système :
   Un point critique pour une fonction de plusieurs variables différentiable est un point où toutes ses dérivées partielles premières s'annulent simultanément (c'est-à-dire un point où le vecteur gradient est nul).
   L'annulation conjointe des dérivées calculées à la question précédente conduit directement au système d'équations non linéaires demandé :

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -3x^2 + 6x + 4y - 2 = 0 & (1) \\ -4y + 4x = 0 & (2) \end{cases}$$

   (c) Résolution du système :
   De l'équation (2), on tire immédiatement :

   $$-4y + 4x = 0 \implies 4y = 4x \implies y = x$$

   Substituons maintenant y par x dans l'équation (1) :

   $$-3x^2 + 6x + 4(x) - 2 = 0 \implies -3x^2 + 10x - 2 = 0$$

   Il s'agit d'une équation du second degré en x. Calculons son discriminant Δ :

   $$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 100 - 24 = 76$$

   Le discriminant étant strictement positif, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{76}}{2 \times (-3)} = \frac{-10 - 2\sqrt{19}}{-6} = \frac{5 + \sqrt{19}}{3} \approx 3{,}12$$

   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{76}}{2 \times (-3)} = \frac{-10 - 2\sqrt{19}}{-6} = \frac{5 - \sqrt{19}}{3} \approx 0{,}21$$

   Puisque l'énoncé impose la condition $x_A < x_B$, on associe les coordonnées (sachant que $y = x$) :

- Point $A = \left(\dfrac{5-\sqrt{19}}{3} ; \dfrac{5-\sqrt{19}}{3}\right) \approx (0{,}21 ; 0{,}21)$
- Point $B = \left(\dfrac{5+\sqrt{19}}{3} ; \dfrac{5+\sqrt{19}}{3}\right) \approx (3{,}12 ; 3{,}12)$

2. Étude de la matrice hessienne et valeurs propres

   (a) Définition de la matrice hessienne :
   Pour une fonction de deux variables, la matrice hessienne est la matrice carrée de dimension 2×2 regroupant ses dérivées partielles secondes (pures et croisées). Elle traduit la courbure locale de la fonction :

$$H_R(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 R}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

   (b) Calcul des dérivées partielles secondes et expression générale :

   - Dérivées pures : $\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 6x + 4y - 2) = -6x + 6$
   - Dérivées pures : $\dfrac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}(-4y + 4x) = -4$
   - Dérivées croisées : $\dfrac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(-3x^2 + 6x + 4y - 2) = 4$

   D'après le théorème de Schwarz, la matrice est symétrique ($\dfrac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} = 4$). L'expression générale de la matrice est :

$$H_R(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+6 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

   (c) Analyse des points critiques A et B :

   i. Calcul des matrices numériques :

   - En A ($x_A \approx 0{,}21$) :

$$H_R(A) = \begin{pmatrix} -4+2\sqrt{19} & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4{,}72 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

   - En B ($x_B \approx 3{,}12$) :

$$H_R(B) = \begin{pmatrix} -4-2\sqrt{19} & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -12{,}72 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

   ii. Détermination des valeurs propres :
   Pour une matrice de taille 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, l'équation caractéristique résolvant

$$\det(H - \lambda I) = 0$$

   s'écrit sous la forme simplifiée :

$$\lambda^2 - \text{Tr}(H)\lambda + \det(H) = 0$$

   où $\text{Tr}(H)$ est la trace de H, c'est à dire la somme de ses coefficients diagonaux.

   - Pour la matrice $H_R(A)$, on a

$$\text{Tr}(H_R(A)) \approx 4{,}72 + (-4) = 0{,}72 \quad \text{et} \quad \det(H_R(A)) \approx (4{,}72 \times (-4)) - 4^2 = -34{,}88$$

L'équation est

$$\lambda^2 - 0{,}72\lambda - 34{,}88 = 0$$

Son discriminant vaut

$$\Delta_A = (-0{,}72)^2 - 4(1)(-34{,}88) > 0$$

Les deux valeurs propres de $H_R(A)$ sont de signes opposés car leur produit (égal au déterminant, $-34{,}88$) est négatif :

$$\lambda_1 \approx 6,27 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \approx -5{,}55 < 0$$

- Pour la matrice $H_R(B)$, on a

$$\text{Tr}(H_R(B)) \approx -12{,}72 + (-4) = -16{,}72 \quad \text{et} \quad \det(H_R(B)) \approx 34{,}88$$

L'équation est

$$\lambda^2 + 16{,}72\lambda + 34{,}88 = 0$$

Les deux racines ont un produit positif ($\det = 34{,}88 > 0$) et une somme négative ($\text{Tr} < 0$). Les deux valeurs propres de $H_R(B)$ sont donc toutes deux strictement négatives :

$$\lambda_3 \approx -2{,}41 < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_4 \approx -14{,}31 < 0$$

iii. *Nature des points critiques :*
- Pour le point A, la matrice hessienne possède des valeurs propres de signes contraires : A est un point selle.
- Pour le point B, la matrice hessienne possède deux valeurs propres strictement négatives : B correspond à un maximum local de la fonction de rendement.

3. Recommandations optimales et rendement maximal

Pour maximiser la production annuelle de café vert, la coopérative doit caler ses interventions sur les coordonnées du maximum local déterminé au point B.

Les valeurs optimales à recommander sont (arrondies au centième) :

- *Densité optimale de l'ombrage :* $x_B = \dfrac{5+\sqrt{19}}{3} \approx 3{,}12$ unités
- *Quantité optimale d'azote (compost) :* $y_B = \dfrac{5+\sqrt{19}}{3} \approx 3{,}12$ centaines de kg/ha (soit 312 kg/ha).

Calculons le rendement maximal théorique attendu $R(x_B, y_B)$ en remplaçant y par x dans l'expression d'origine de R puisque $y_B = x_B$:

$$R(x_B, x_B) = -x_B^3 + 3x_B^2 - 2x_B^2 + 4x_B^2 - 2x_B = -x_B^3 + 5x_B^2 - 2x_B$$

En substituant $x_B \approx 3{,}122$:

$$R(3{,}122, 3{,}122) = -(3{,}122)^3 + 5(3{,}122)^2 - 2(3{,}122)$$

$$R(3{,}122, 3{,}122) \approx -30{,}43 + 48{,}73 - 6{,}24 = 12{,}06 \text{ tonnes/ha}$$

Le modèle prévoit donc un rendement maximal théorique d'environ 12, 06 tonnes de café vert par hectare.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Topographie et Opérateur Gradient

(a) Calcul du gradient de $H(x,y)$:
Le gradient d'un champ scalaire à deux variables regroupe ses dérivées partielles premières sous forme vectorielle :

$$\nabla H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Calculons séparément chaque dérivée :

- Par rapport à x (y est traitée comme une constante) :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2e^{-y} + 3x\right) = 4xe^{-y} + 3$$

- Par rapport à y (x est traitée comme une constante) :

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2e^{-y} + 3x\right) = 2x^2 \cdot (-e^{-y}) + 0 = -2x^2e^{-y}$$

On en déduit l'expression formelle de l'opérateur gradient :

$$\nabla H(x,y) = \begin{pmatrix} 4xe^{-y} + 3 \\ -2x^2e^{-y} \end{pmatrix}$$

(b) Évaluation au point $A(1,0)$:
En substituant $x = 1$ et $y = 0$ (sachant que $e^0 = 1$), on obtient :

$$\nabla H(1,0) = \begin{pmatrix} 4(1)e^0 + 3 \\ -2(1)^2e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Direction de la plus grande pente :
Une propriété fondamentale du gradient est qu'il pointe toujours vers la direction où la fonction augmente le plus fortement (la ligne d'ascension maximale). Pour implanter la vanne de régulation là où la hauteur d'eau croît le plus vite, l'ingénieur doit orienter son déplacement précisément selon le vecteur gradient, soit dans la direction du vecteur :

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Flux d'eau et Opérateur Divergence

(a) Définition et calcul de la divergence d'un champ tridimensionnel :
La divergence d'un champ vectoriel $V(V_x, V_y, V_z)$ dans $\mathbb{R}^3$ correspond au produit scalaire formel entre le vecteur Nabla ∇ et le champ V. C'est une fonction scalaire somme des dérivées partielles directes :

$$\text{div}(V) = \nabla \cdot V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Dérivons chaque composante de notre champ de vitesse :

- $\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) = 6xy$
- $\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-xy^2) = -2xy$
- $\frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 2$

En sommant ces trois expressions, on obtient la formule générale de la divergence :

$$\text{div}(V) = 6xy - 2xy + 2 = 4xy + 2$$

(b) Évaluation numérique au point $B(1,2,5)$:
Ici, $x = 1$, $y = 2$ et $z = 5$. Injectons ces valeurs dans le résultat de la divergence :

$$\text{div}(V)(1,2,5) = 4(1)(2) + 2 = 8 + 2 = 10$$

(c) Interprétation :
Puisque $\text{div}(V)(1,2,5) = 10 \neq 0$, l'écoulement est localement *compressible* en ce point.
Plus précisément, la divergence étant positive ($\text{div}(V) > 0$), cela traduit un comportement de source : le fluide subit une expansion volumique locale (il se dilate / s'accélère).
Conséquence pour les sédiments : Un point où la divergence est positive est associé à une accélération des lignes de courant. L'énergie cinétique locale du fluide est suffisante pour maintenir les particules fines en suspension et empêcher leur décantation. Cela *favorise l'évacuation des sédiments* et limite l'envasement du canal en ce point.

3. Tourbillons et Opérateur Rotationnel

(a) Définition du rotationnel :
Le rotationnel d'un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ s'obtient par le produit vectoriel formel du vecteur Nabla ∇ avec le vecteur champ V :

$$\vec{\text{rot}}(V) = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(b) Calcul du rotationnel de V :
Reprenons notre champ de vitesses et calculons les différences croisées requises :

- Composante en x : $\frac{\partial(2z)}{\partial y} - \frac{\partial(-xy^2)}{\partial z} = 0 - 0 = 0$
- Composante en y : $\frac{\partial(3x^2y)}{\partial z} - \frac{\partial(2z)}{\partial x} = 0 - 0 = 0$
- Composante en z : $\frac{\partial(-xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y)}{\partial y} = (-y^2) - (3x^2) = -3x^2 - y^2$

Le vecteur rotationnel global s'écrit donc :

$$\vec{\text{rot}}(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

(c) Recherche d'un écoulement irrotationnel :
Pour que l'écoulement soit irrotationnel, il faut que le vecteur rotationnel soit égal au vecteur nul $\vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -3x^2 - y^2 = 0 \implies 3x^2 + y^2 = 0$$

Comme $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, la somme de deux carrés de nombres réels ne peut s'annuler que si chaque terme est nul individuellement. Ainsi, la seule zone (le seul lieu géométrique) où l'écoulement est irrotationnel est l'origine :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0$$

Sur tout le reste du domaine du canal, l'écoulement présente un rotationnel non nul et est donc systématiquement rotationnel.

(d) La présence d'un rotationnel non nul (porté ici par l'axe vertical z) signifie que les particules d'eau subissent un mouvement macroscopique de rotation sur elles-mêmes. Près des parois du canal (y proche des berges), ce frottement tourbillonnaire induit de fortes *contraintes de cisaillement hydraulique* sur les parois.
Pour un canal d'irrigation en terre le long du fleuve Niger, ces tourbillons vont endomager la base des berges, provoquant une déstabilisation mécanique et des glissements de terrain locaux. L'ingénieur agronome doit repérer ces zones de fort rotationnel pour planifier la pose d'aménagements de consolidation, afin de pérenniser le réseau hydraulique et d'éviter que le canal ne s'effondre.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Géométrie du terrain et lignes de niveau

   (a) Définition d'une ligne de niveau :
   Pour une fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une constante réelle c, la ligne de niveau L_c est l'ensemble des points au sol (x, y) dont l'image par f est égale à c :
   $$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$
   En topographie, ces lignes correspondent aux courbes de niveau reliant tous les points situés à la même altitude.

   (b) Équation et nature de la courbe L_8 :
   On pose $f(x, y) = 8$:
   $$12 - x^2 - 2y^2 = 8 \implies 12 - 8 = x^2 + 2y^2 \implies x^2 + 2y^2 = 4$$
   En divisant l'ensemble de l'équation par 4 pour obtenir une forme standard, on a :
   $$\frac{x^2}{4} + \frac{2y^2}{4} = 1 \implies \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$
   Il s'agit de l'équation cartésienne d'une *ellipse* centrée à l'origine $(0, 0)$, de demi-grand axe $a = 2$ (sur l'axe Ouest-Est) et de demi-petit axe $b = \sqrt{2}$ (sur l'axe Sud-Nord).

   (c) Étude de la pente maximale et du gradient :

      i. On calcule les dérivées partielles premières de $f(x, y) = 12 - x^2 - 2y^2$:
      $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4y$$
      Le vecteur gradient s'écrit donc :
      $$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y \end{pmatrix}$$

      ii. Évaluation au point $A(2, 1)$:
      $$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(2, 1) = \begin{pmatrix} -2(2) \\ -4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

      iii. Trajectoire naturelle de l'eau :
      L'eau s'écoule vers le bas selon la ligne de plus grande pente décroissante, ce qui correspond à l'opposé du gradient ($-\overrightarrow{\text{grad}}\, f$). Le vecteur directeur $\vec{v}_e$ de l'écoulement en A est :
      $$\vec{v}_e = -\overrightarrow{\text{grad}}\, f(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   (d) Démonstration de l'orthogonalité et intérêt agronomique :
   Vérifions d'abord que le point $A(2, 1)$ appartient bien à la ligne de niveau L_8 calculée précédemment : $2^2 + 2(1)^2 = 4 + 2 = 6 \neq 4$. Le point A appartient en réalité à la ligne de niveau L_6 d'équation
   $$x^2 + 2y^2 = 6$$
   L'équation implicite de cette courbe est $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6 = 0$. Un vecteur directeur de la tangente à cette courbe en un point (x_0, y_0) est donné par le vecteur
   $$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Évalué au point $A(2,1)$, le vecteur tangent $\vec{u}_A$ est :

$$\vec{u}_A = \begin{pmatrix} -4y_A \\ 2x_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit scalaire entre le gradient en A et ce vecteur tangent $\vec{u}_A$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(2,1) \cdot \vec{u}_A = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = (-4) \times (-4) + (-4) \times 4 = 16 - 16 = 0$$

Le produit scalaire étant nul, le vecteur gradient est rigoureusement orthogonal à la tangente de la courbe de niveau.

Cette propriété géométrique garantit que les courbes de niveau (où l'eau stagne sans s'écouler) et les lignes de plus grande pente (où l'eau dévale le plus vite) sont perpendiculaires en tout point. Pour construire des digues de terrasses efficaces qui bloquent l'écoulement de l'eau et préviennent l'érosion, l'ingénieur doit caler précisément les digues perpendiculairement aux lignes de gradient, c'est-à-dire le long des courbes de niveau.

2. Optimisation sous contrainte (Réseau d'alimentation)

(a) Expression de x en fonction de y :
D'après la contrainte du canal rectiligne $x + 2y = 3$, on isole immédiatement x :

$$x = 3 - 2y$$

(b) Modélisation de la fonction à une seule variable $h(y)$:
On substitue l'expression de x dans la fonction d'altitude initiale $f(x,y) = 12 - x^2 - 2y^2$:

$$h(y) = 12 - (3 - 2y)^2 - 2y^2$$

Développons cette expression :

$$h(y) = 12 - (9 - 12y + 4y^2) - 2y^2 = 12 - 9 + 12y - 4y^2 - 2y^2$$

$$h(y) = -6y^2 + 12y + 3$$

(c) Recherche du maximum par dérivation :
La fonction $h(y)$ est polynomiale de degré 2. Sa fonction dérivée est :

$$h'(y) = -12y + 12$$

On cherche la valeur qui annule cette dérivée :

$$h'(y) = 0 \implies -12y + 12 = 0 \implies 12y = 12 \implies y = 1$$

Comme la dérivée seconde $h''(y) = -12$ est strictement négative, la valeur $y = 1$ correspond bien à un maximum global de la fonction h.

(d) Coordonnées optimales et altitude du réservoir :

- On trouve l'ordonnée au sol optimale : $y_R = 1$
- On calcule l'abscisse au sol correspondante via la contrainte : $x_R = 3 - 2(1) \implies x_R = 1$
- On calcule l'altitude maximale en injectant ces coordonnées dans $f(x,y)$:

$$z_R = f(1,1) = 12 - (1)^2 - 2(1)^2 = 12 - 1 - 2 = 9 \text{ dizaines de mètres}$$

L'ingénieur doit implanter le bassin de rétention d'eau au point de coordonnées au sol $(1\,;1)$. Le réservoir sera alors positionné à une altitude optimale de 90 mètres, garantissant la charge hydraulique maximale pour irriguer toutes les terrasses de riz en aval.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Calcul du Gradient et Points Critiques

   (a) Calcul du gradient de $I(x,y)$:
   Posons $u(x,y) = 2x - y^2$ et $v(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$. La fonction est de la forme $u \cdot v$, sa dérivation suit la règle $(uv)' = u'v + uv'$.
   Calculons les dérivées partielles premières :

   - Par rapport à x :

   $$\frac{\partial I}{\partial x}(x,y) = (2) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} + (2x - y^2) \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

   $$\frac{\partial I}{\partial x}(x,y) = \left(2 - 2x^2 + xy^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

   - Par rapport à y :

   $$\frac{\partial I}{\partial y}(x,y) = (-2y) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} + (2x - y^2) \cdot (-y) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

   $$\frac{\partial I}{\partial y}(x,y) = \left(-2y - 2xy + y^3\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = y\left(y^2 - 2x - 2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

   Le vecteur gradient s'écrit donc :

   $$\nabla I(x,y) = \begin{pmatrix} (2 - 2x^2 + xy^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ y\,(y^2 - 2x - 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

   (b) Mise en système de l'annulation du gradient :
   Les points critiques vérifient $\nabla I(x,y) = \vec{0}$. Comme la fonction exponentielle $e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^2$, l'annulation du gradient équivaut strictement à l'annulation simultanée des facteurs polynomiaux.
   On retrouve directement le système proposé :

   $$\begin{cases} 2 - 2x^2 + xy^2 = 0 & (1) \\ y(y^2 - 2x - 2) = 0 & (2) \end{cases}$$

   (c) Résolution du système et recherche des points A et B :
   L'équation (2) offre une alternative sous forme de produit de facteurs :

   - Premier cas : $y = 0$
   Substituons $y = 0$ dans l'équation (1) :

   $$2 - 2x^2 + x(0)^2 = 0 \implies 2 - 2x^2 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

   Cela nous donne deux premiers points critiques potentiels : $(1,0)$ et $(-1,0)$.
   - Second cas : $y^2 - 2x - 2 = 0 \implies y^2 = 2x + 2$
   Substituons cette expression de y^2 dans l'équation (1) :

   $$2 - 2x^2 + x(2x+2) = 0 \implies 2 - 2x^2 + 2x^2 + 2x = 0 \implies 2 + 2x = 0 \implies x = -1$$

   Si $x = -1$, calculons y via l'expression de y^2 :

   $$y^2 = 2(-1) + 2 = -2 + 2 = 0 \implies y = 0$$

   Ce cas particulier retombe sur le point $(-1,0)$ déjà identifié.

L'exercice spécifiant de s'intéresser à l'existence de deux points nommés A et B avec $x_A > x_B$, on isole les deux uniques solutions distinctes du modèle :

$$A = (1\,;0) \quad \text{et} \quad B = (-1\,;0)$$

2. Matrice Hessienne et Valeurs Propres

   (a) Calcul de la matrice Hessienne générale :
   Pour simplifier l'écriture des dérivées secondes, on conserve le facteur commun exponentiel, noté $\mathcal{E} =$. On redérive les composantes du gradient :

   - $\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \left(2x^3 - 6x - x^2y^2 + y^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$
   - $\dfrac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \left(-y^4 + 2xy^2 + 5y^2 - 2x - 2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$
   - $\dfrac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = y\left(2x^2 - xy^2 + 2x - 2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

   La matrice est symétrique. Son expression générale est :

$$H_I(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^3 - 6x - x^2y^2 + y^2 & y(2x^2 - xy^2 + 2x - 2) \\ y(2x^2 - xy^2 + 2x - 2) & -y^4 + 2xy^2 + 5y^2 - 2x - 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

   (b) Évaluation de la matrice aux points A et B :
   Puisque $y = 0$ pour les deux points, le terme d'exponentielle vaut $\mathcal{E} = e^{-1/2}$ et les termes croisés hors-diagonaux s'annulent (0).

   - Au point $A(1,0)$:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(1,0) = (2(1)^3 - 6(1) - 0 + 0) \cdot e^{-1/2} = -4e^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(1,0) = (0 + 0 + 0 - 2(1) - 2) \cdot e^{-1/2} = -4e^{-1/2}$$

$$H_I(A) = \begin{pmatrix} -4e^{-1/2} & 0 \\ 0 & -4e^{-1/2} \end{pmatrix}$$

   - Au point $B(-1,0)$:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(-1,0) = (2(-1)^3 - 6(-1) - 0 + 0) \cdot e^{-1/2} = (-2+6)e^{-1/2} = 4e^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(-1,0) = (0 + 0 + 0 - 2(-1) - 2) \cdot e^{-1/2} = (2-2)e^{-1/2} = 0$$

$$H_I(B) = \begin{pmatrix} 4e^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Détermination des valeurs propres :
   Les matrices $H_I(A)$ et $H_I(B)$ étant diagonales, leurs valeurs propres se lisent directement sur la diagonale principale.

   - Pour $H_I(A)$: $\lambda_1 = -4e^{-1/2} \approx -2{,}43$ et $\lambda_2 = -4e^{-1/2} \approx -2{,}43$.
   - Pour $H_I(B)$: $\lambda_3 = 4e^{-1/2} \approx +2{,}43$ et $\lambda_4 = 0$.

   (d) Conclusion :

   - Nature du point A : Les deux valeurs propres de $H_I(A)$ sont strictement négatives. Le point $A(1,0)$ est donc un maximum local (et ici global) de la fonction.

     Sens biologique : Le point A définit le "foyer optimal de pullulation". Il correspond à un sol modérément humide ($x = 1$) combiné à une absence de végétation basse au sol ($y = 0$), une configuration typique des zones de pontes idéales sablonneuses juste après les premières pluies. C'est la zone d'alerte rouge maximale où les services agronomiques du Niger doivent concentrer les prospections d'épandage.

- Nature du point B : La matrice possède une valeur propre positive et une valeur propre nulle. Le point $B(-1,0)$ est un point critique dégénéré (vallée parabolique ou point d'inflexion).

  Sens biologique : Ce point correspond à un sol très sec ($x=-1$) sans végétation ($y=0$). L'indice de pullulation y atteint son niveau le plus bas stable. C'est une zone d'inhibition biologique complète où le risque acridien est nul, ne nécessitant aucune mobilisation de ressources phytosanitaires.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Forme géométrique des aménagements (Lignes de niveau)

   Par définition, la ligne de niveau $\mathscr{C}_\lambda$ associée à l'altitude constante $\lambda \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x,y) du plan vérifiant l'équation $f(x,y)=\lambda$.
   Développons cette égalité à partir du modèle fourni :

   $$\left(y-x^2\right)^3-1=\lambda$$

   $$\left(y-x^2\right)^3=\lambda+1$$

   Puisque la fonction racine cubique est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on applique l'opération de chaque côté pour isoler le terme de parenthèse :

   $$y-x^2=\sqrt[3]{\lambda+1}$$
   $$y=x^2+\sqrt[3]{\lambda+1}$$

   Pour toute valeur de l'altitude λ, la constante $\sqrt[3]{\lambda+1}$ fait office d'ordonnée à l'origine (décalage vertical). L'équation obtenue est de la forme $y=x^2+K$ ($K\in\mathbb{R}$), ce qui correspond rigoureusement à l'équation cartésienne d'une **parabole** orientée vers le haut (axe focal vertical parallèle à l'axe y). L'ingénieur doit donc modeler ses billons et ses sillons suivant des trajectoires paraboliques au sol.

2. Étude des pentes du terrain (Gradient)

   Pour calculer les dérivées partielles premières de la fonction $f(x,y)=(y-x^2)^3-1$, on applique la règle de dérivation des fonctions composées de type $g(x,y)^3$, dont la dérivée est $3\cdot g'(x,y)\cdot g(x,y)^2$.

   - Dérivée partielle par rapport à x : (la variable y est considérée comme constante)

     $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}(y-x^2)\right)\cdot(y-x^2)^2-0$$

     $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\cdot(-2x)\cdot(y-x^2)^2=\mathbf{-6x(y-x^2)^2}$$

   - Dérivée partielle par rapport à y : (la variable x est considérée comme constante)

     $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}(y-x^2)\right)\cdot(y-x^2)^2-0$$

     $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3\cdot(1)\cdot(y-x^2)^2=\mathbf{3(y-x^2)^2}$$

   Le vecteur gradient $\nabla f(x,y)$ est le vecteur colonne composé de ces deux expressions :

   $$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6x(y-x^2)^2\\ 3(y-x^2)^2\end{pmatrix}=3(y-x^2)^2\begin{pmatrix}-2x\\ 1\end{pmatrix}$$

3. Modélisation du ruissellement de l'eau

   a) Vecteur directeur de la tangente en $A(x_0, y_0)$:
   À la question 1, nous avons établi que la ligne de niveau $\mathscr{C}_\lambda$ est une courbe d'équation explicite

$$y = x^2 + \sqrt[3]{\lambda + 1}$$

   Pour une courbe définie par une fonction explicite $y = g(x)$, un vecteur directeur de la tangente en un point d'abscisse x_0 est donné de manière classique par la pente de la dérivée : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix}$.
   Ici, $g(x) = x^2 + \sqrt[3]{\lambda + 1}$, d'où $g'(x) = 2x$. En évaluant au point A, un vecteur directeur de la tangente est :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_0 \end{pmatrix}$$

   b) Démonstration de l'orthogonalité :
   Calculons le produit scalaire entre le vecteur directeur de la tangente $\vec{u}$ et le vecteur gradient de la fonction évalué au même point $A(x_0, y_0)$, noté $\nabla f(x_0, y_0)$:

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -6x_0(y_0 - x_0^2)^2 \\ 3(y_0 - x_0^2)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \left[-6x_0(y_0 - x_0^2)^2 \times 1\right] + \left[3(y_0 - x_0^2)^2 \times 2x_0\right]$$

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = -6x_0(y_0 - x_0^2)^2 + 6x_0(y_0 - x_0^2)^2 = \mathbf{0}$$

   Le produit scalaire est rigoureusement nul, ce qui démontre que le vecteur gradient est perpendiculaire au vecteur tangent de la ligne de niveau au point A.

   c) En hydrologie, l'eau s'écoule par gravité suivant la ligne de plus grande pente vers le bas, une direction portée par le vecteur opposé au gradient $(-\nabla f)$.
   L'orthogonalité prouvée ici signifie que la trajectoire naturelle de descente de l'eau (le gradient) coupe à angle droit les diguettes artificielles façonnées par l'agronome (les lignes de niveau).
   Pour l'agriculture maraîchère de Mysore, cette disposition est idéale : en érigeant des barrières en forme de paraboles le long des lignes d'isovaleurs, l'ingénieur crée un obstacle parfaitement perpendiculaire au flux de ruissellement. L'eau de mousson se retrouve freinée frontalement au fond des sillons, infiltrant de manière homogène le système racinaire des plantes sans pouvoir prendre de vitesse, ce qui élimine les risques d'érosion mécanique et de lessivage des intrants organiques de la parcelle.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Cartographie des interactions (Calcul du Gradient)

   (a) Calcul des dérivées partielles premières :
   On dérive successivement la fonction $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{2} + xyz + y - z$ par rapport à ses trois variables indépendantes en considérant à chaque fois les deux autres comme des constantes :

   - *Par rapport à x :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{2x}{2} + yz + 0 - 0 = x + yz$
   - *Par rapport à y :* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 + xz + 1 - 0 = xz + 1$
   - *Par rapport à z :* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 + xy + 0 - 1 = xy - 1$

(b) Détermination de l'unique point critique A :
Un point de la plantation est stationnaire (point critique) si et seulement si son vecteur gradient est nul, ce qui équivaut à résoudre le système tridimensionnel non linéaire suivant :

$$\nabla f(x,y,z) = \vec{0} \iff \begin{cases} x + yz = 0 & (1) \\ xz + 1 = 0 & (2) \\ xy - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

De l'équation (3), on en déduit que $xy = 1 \implies y = \dfrac{1}{x}$ (on note que $x \neq 0$).
De l'équation (2), on en déduit que $xz = -1 \implies z = -\dfrac{1}{x}$.
Substituons ces expressions de y et z dans l'équation (1) :

$$x + \left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \implies x - \frac{1}{x^2} = 0 \implies x = \frac{1}{x^2} \implies x^3 = 1$$

Dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, l'équation $x^3 = 1$ admet pour unique solution $x = 1$.
Calculons maintenant les valeurs associées de y et z :

- $y = \dfrac{1}{1} = 1$
- $z = -\dfrac{1}{1} = -1$

Le gradient de la fonction f s'annule donc en un seul et unique point critique du domaine, noté A, de coordonnées :

$$A(1\,;1\,;-1)$$

2. Analyse de la stabilité éco-agricole

(a) Calcul des dérivées partielles secondes et matrice hessienne générale :

- *Ligne 1* : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial(x+yz)}{\partial x} = 1,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y$
- *Ligne 2* : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial(xz+1)}{\partial y} = 0,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x$
- *Ligne 3* : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{\partial(xy-1)}{\partial z} = 0$

On écrit l'opérateur hessien sous sa forme matricielle générique :

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Évaluation numérique de la matrice au point A :
En injectant les valeurs de coordonnées du point critique A ($x = 1$, $y = 1$, $z = -1$), on obtient la matrice numérique exacte demandée :

$$H_f(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Diagonalisation et conclusions écologiques

(a) Développement de l'équation caractéristique :
On construit la matrice $(H_f(A) - \lambda I_3)$ en retranchant le paramètre scalaire λ sur sa diagonale principale, puis on calcule son déterminant :

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Développons ce déterminant suivant la première ligne (méthode des cofacteurs) :

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculons chaque sous-déterminant de dimension 2×2 :

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right) + 1\,(\lambda - 1) + 1\,(-1 - (-\lambda))$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) + (\lambda - 1) + (\lambda - 1)$$

Mettons en évidence le facteur commun $(\lambda - 1)$ en remarquant que $(1-\lambda) = -(\lambda - 1)$:

$$P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) + 2(\lambda - 1)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)\left[-(\lambda^2 - 1) + 2\right] = (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 1 + 2\right)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)\left(3 - \lambda^2\right)$$

En factorisant le signe négatif intérieur, l'équation caractéristique équivaut bien à :

$$-(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3) = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3) = 0$$

(b) Calcul des valeurs propres exactes :
D'après la forme produit de notre polynôme caractéristique, les racines s'isolent immédiatement :

- $\lambda - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 1$
- $\lambda^2 - 3 = 0 \implies \lambda^2 = 3 \implies \lambda_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}73 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -\sqrt{3} \approx -1{,}73$

(c) Interprétation physique, agronomique et conclusion :
On étudie les signes du spectre des valeurs propres obtenues :

$$\lambda_1 = 1 > 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{3} > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -\sqrt{3} < 0$$

La matrice hessienne possède à la fois des valeurs propres strictement positives et une valeur propre strictement négative. Le point critique A n'est donc ni un minimum local, ni un maximum local : c'est un point selle, représentant un seuil d'instabilité.

La fonction f étant polynomiale continue non bornée sur $\mathbb{R}^3$, et l'unique point critique étant un point selle, la fonction f n'admet aucun extremum global ou local sur $\mathbb{R}^3$. La vulnérabilité peut théoriquement tendre vers l'infini (scénario de crise totale) ou vers moins l'infini selon la direction de déplacement choisie.

Le point $A(1,1,-1)$ correspond à une configuration où l'altitude est de $1\,300$ m ($x = 1$), sous une forte densité d'ombrage par bananiers ($y = 1$) mais combinée à un déficit de bio-fertilisants ($z = -1$). C'est un point de bascule instable. Si les producteurs augmentent l'apport organique ($z > -1$), ils basculent vers des trajectoires de stabilité qui réduisent drastiquement la rouille du caféier. À l'inverse, un relâchement de la fertilisation sous un ombrage mal géré provoquera une explosion soudaine et incontrôlée de la maladie.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Topographie et lignes de fuite (Le Gradient)

(a) Calcul des dérivées partielles premières de $h(x,y)$:
La fonction d'altitude est de la forme $h(x,y) = \ln(u(x,y))$ où $u(x,y) = x^2 + y^2 + 1$. Sa dérivée suit la règle $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$.

- Par rapport à x (y est traitée comme une constante) :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

- Par rapport à y (x est traitée comme une constante) :

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot (2y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

(b) Expression formelle du vecteur gradient :
Le gradient rassemble ces deux dérivées sous forme de vecteur colonne :

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \frac{2}{x^2+y^2+1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(c) Application numérique au point $A(1,2)$ et sens de l'écoulement :
Au point A, nous avons $x = 1$ et $y = 2$, d'où le dénominateur $1^2 + 2^2 + 1 = 6$:

$$\nabla h(1,2) = \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Le fluide descend naturellement la pente selon la ligne de plus grande descente, modélisée par l'opposé du vecteur gradient ($-\nabla h$). Le vecteur directeur $\vec{v}_e$ de la trajectoire de l'eau au point A est donc :

$$\vec{v}_e = -\nabla h(1,2) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \left(\text{ou colinéairement } \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

2. Distorsion du flux de sédiments (Le Jacobien)

(a) Structure générale de la matrice jacobienne dans $\mathbb{R}^3$:
Pour un champ vectoriel $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la matrice jacobienne est une matrice carrée d'ordre 3 contenant toutes les dérivées partielles premières croisées des composantes (F_1, F_2, F_3) :

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(b) Calcul et construction de la matrice jacobienne générale :
En dérivant successivement chaque ligne du champ $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ -xy^2 \\ z(x^2-y^2) \end{pmatrix}$, on obtient :

- Pour $F_1 = x^2y$: $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0$.
- Pour $F_2 = -xy^2$: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = -y^2$, $\frac{\partial F_2}{\partial y} = -2xy$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$.
- Pour $F_3 = z(x^2-y^2)$: $\frac{\partial F_3}{\partial x} = 2xz$, $\frac{\partial F_3}{\partial y} = -2yz$, $\frac{\partial F_3}{\partial z} = x^2 - y^2$.

On assemble ces résultats dans la matrice finale :

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ -y^2 & -2xy & 0 \\ 2xz & -2yz & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

3. Analyse du comportement hydraulique

(a) La Divergence (Zones d'accumulation vs Érosion)

i. Calcul de $\text{div}(F)$: La divergence s'obtient en additionnant les dérivées partielles directes de chaque composante du vecteur :

$$\text{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = (2xy) + (-2xy) + (x^2 - y^2) = x^2 - y^2$$

ii. Lien avec la Trace de la matrice jacobienne : Par définition, la trace d'une matrice carrée, notée $\text{Tr}(J)$, correspond à la somme de ses éléments diagonaux. En observant la matrice obtenue à la question 2.b, on vérifie immédiatement :

$$\text{Tr}(J_F) = J_{11} + J_{22} + J_{33} = 2xy + (-2xy) + (x^2 - y^2) = x^2 - y^2$$

On a donc de façon tout à fait cohérente : $\text{div}(F) = \text{Tr}(J_F)$.

iii. Délimitation des zones géographiques de la parcelle :

- *Zone de convergence ($div(F) < 0$) :* Se produit là où $x^2 - y^2 < 0 \implies |x| < |y|$. Dans cette zone, le fluide ralentit et se comprime. D'un point de vue agronomique, cela engendre une *accumulation d'eau et un dépôt sédimentaire* (formation de boues).
- *Zone de divergence ($div(F) > 0$) :* Se produit là où $x^2 - y^2 > 0 \implies |x| > |y|$. Le fluide subit une accélération spatiale (effet de source), ce qui augmente son énergie cinétique. C'est la zone critique d'*érosion intense par arrachement des sols* arables.

(b) Le Rotationnel (Formation de tourbillons)

i. Calcul général du vecteur rotationnel :
Par le produit vectoriel formel du vecteur nabla ∇ et du champ F :

$$\vec{\text{rot}}(F) = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2yz - 0 \\ 0 - 2xz \\ -y^2 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2yz \\ -2xz \\ -(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

ii. Évaluation au point du plant de manioc $B(1, 1, 2)$:
En remplaçant $x = 1$, $y = 1$ et $z = 2$:

$$\vec{\text{rot}}(F)(1, 1, 2) = \begin{pmatrix} -2(1)(2) \\ -2(1)(2) \\ -(1^2 + 1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

iii. Diagnostic hydraulique et risques agronomiques :
Puisque $\vec{\text{rot}}(F)(B) \neq \vec{0}$, le flux *n'est pas irrotationnel* au point B. Il présente au contraire une forte activité rotationnelle (vorticité non nulle).

La présence de ce vecteur rotationnel indique la formation macroscopique de *tourbillons violents* au ras du sol. Ces mouvements turbulents induisent de fortes contraintes de cisaillement multidirectionnelles qui vont affouiller la terre meuble entourant la base du plant, déchausser ses racines et risquer de déraciner ou de détruire mécaniquement la jeune culture de manioc lors des fortes averses de Macouria.
