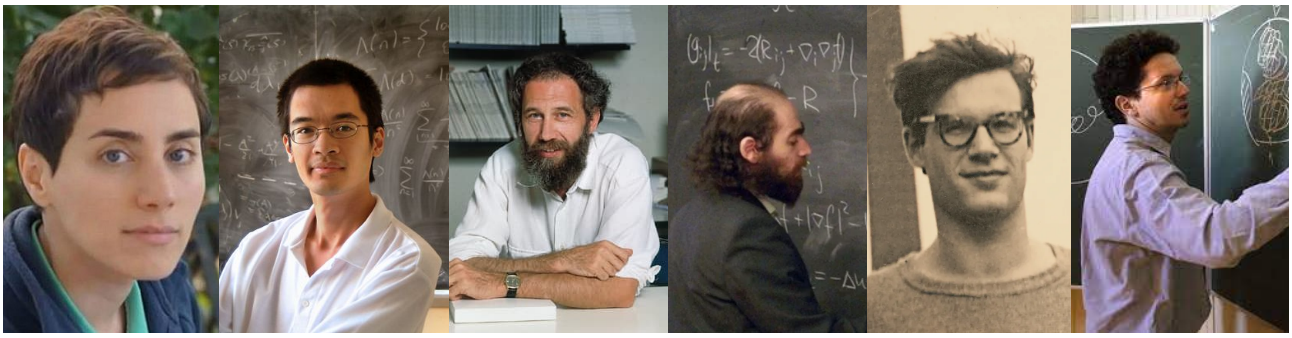
istom Ecole supérieure d'agro-développement international

Polynômes

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



CAUTION Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Résumé

Les polynômes sont des objets mathématiques très simples mais aux propriétés extrêmement riches. Vous savez déjà résoudre les équations de degré 2 : $aX^2 + bX + c = 0$. Savez-vous que la résolution des équations de degré 3, $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$, a fait l'objet de luttes acharnées dans l'Italie du XVI^{e} siècle ?

Dans ce chapitre, après quelques définitions des concepts de base, nous allons étudier la division euclidienne des polynômes. On continuera avec un théorème fondamental de l'algèbre : « Tout polynôme de degré n admet n racines complexes. » On terminera avec les fractions rationnelles : une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Table des matières

[1] version du 25 octobre 2024

1 Définitions

Définition 1.
Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{R}[X]$.

- Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme
- Si tous les coefficients a_i sont nuls, P est appelé le polynôme nul, il est noté 0
- On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$. On le note $\deg(P)$. Pour le degré du polynôme nul on pose par convention $\deg(0) = -\infty$
- Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$ est appelé un polynôme constant. Si $a_0 \neq 0$, son degré est égale à 0.

Exemple 1.
Le polynôme $X^3 - 5X + 4$ est un polynôme de degré 3. L'expression $X^n + 1$ est un polynôme de degré n. De la même façon, d'après la définition, 2 est un polynôme constant, de degré 0.
Soient

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \qquad \text{et} \qquad Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0.$$

- **Égalité.** Dire que P et Q sont égaux revient à dire que leur coeefficents sont deux à deux égaux, c'est à dire

$$P = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \quad a_i = b_i$$

- **Addition.** On peut écrire

$$P + Q = (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0)$$

- **Multiplication.** On a

$$P \times Q = c_r X^r + c_{r-1} X^{r-1} + \cdots + c_1 X + c_0$$

avec $r = n + m$ et $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ pour $k \in \{0, \ldots, r\}$.

- **Multiplication par un scalaire.** Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \cdot P$ est le polynôme dont le i-ème coefficient est λa_i, c'est à dire $\lambda P = \lambda a_n X^n + \lambda a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 X + \lambda a_0$

Un proposition utile sur les degrés, avec les opérations présentées ci-dessus, est la suivante.

Proposition 1.
Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q) \qquad \textit{et} \qquad \deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg Q)$$

Définition 2.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réelles et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réelles de degrés inférieurs ou égale à n, c'est à dire

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}.$$

Proposition 2.
Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 2.
Soient $P = 2x^2 + 5x + 6$ et $Q = x^2 + 1$. On a P et Q élément de $\mathbb{R}_2[X]$. On peut alors facilement vérifier que $P + Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
Complétons les définitions sur les polynômes.

Définition 3.

- Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type $a_k X^k$) sont appelés monômes.
- Soit
$$P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$
un polynôme avec $a_n \neq 0$. On appelle terme dominant le monôme $a_n X^n$. Le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant de P.
- Si le coefficient dominant est 1, on dit que P est un polynôme unitaire.

Exemple 3.
On considère le polynôme suivant
$$P(X) = (X - 1)(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1).$$
On développe cette expression :
$$P(X) = \left(X^{n+1} + X^n + \cdots + X^2 + X\right) - \left(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1\right) = X^{n+1} - 1.$$
$P(X)$ est donc un polynôme de degré $n + 1$, il est unitaire et est somme de deux monômes : X^{n+1} et -1.

Remarque.
Tout polynôme est donc une somme finie de monômes.

2 Division euclidienne

Définition 4.
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$, on dit que B divise A s'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B|A$.

Remarque.
On dit aussi que A est multiple de B ou que A est divisible par B.
Outre les propriétés évidentes comme $A|A$, $1|A$ et $A|0$ nous avons les résultats suivants.

Proposition 3.
Soient $A, B, C \in \mathbb{R}[X]$.

- *Si $A|B$ et $B|A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $A = \lambda B$.*
- *Si $A|B$ et $B|C$ alors $A|C$.*
- *Si $C|A$ et $C|B$ alors $C|(AU + BV)$, pour tout $U, V \in \mathbb{R}[X]$.*

Théorème 1 (Division euclidienne des polynômes)**.**
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R tels que :
$$A = BQ + R \quad \textit{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

Q est appelé le quotient, R le reste et cette écriture est la division euclidienne de A par B. Notez que la condition $\deg(R) < \deg(B)$ signifie $R = 0$ ou bien $0 \leq \deg(R) < \deg(B)$. Enfin $R = 0$ si et seulement si $B|A$.

Exemple 4.
Effectuons la division euclidienne de $A = 2X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par $B = X^2 + X + 2$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2X^4 + & X^3 + & X^2 & + X & + 1 & X^2 + X + 2 \\ \cline{6-6}
2X^4 + & 2X^3 + & 4X^2 & & & 2X^2 - X - 2 \\ \cline{1-3}
 & -X^3 - & 3X^2 & + X & + 1 & \\
 & -X^3 - & X^2 & - 2X & & \\ \cline{2-4}
 & & -2X^2 & + 3X & + 1 & \\
 & & -2X^2 & - 2X & - 4 & \\ \cline{3-5}
 & & & 5X & + 5 &
\end{array}
$$

Ici on a donc $Q = 2X^2 - X - 2$ et $R = 5X + 5$. On peut alors écrire

$$2X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \left(X^2 + X + 2\right)\left(2X^2 - X - 2\right) + 5X + 5$$

3 Racine d'un polynôme, factorisation

3.1 Racines d'un polynôme

Définition 5.
Soit $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$. Pour un élément $x \in \mathbb{R}$, on note

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

On associe ainsi au polynôme P une fonction polynôme (que l'on note encore P)

$$P : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array} \right.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine (ou un zéro) de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 4.

$$P(\alpha) = 0 \quad \iff \quad X - \alpha \textit{ divise } P$$

Définition 6.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une racine de multiplicité k de P si $(X - \alpha)^k$ divise P alors que $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

Lorsque $k = 1$ on parle d'une racine simple, lorsque $k = 2$ d'une racine double, etc. On dit aussi que α est une racine d'ordre k.

Proposition 5.
Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes.

(i) α *est une racine de multiplicité* k *de* P.

(ii) *Il existe* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P = (X - \alpha)^k Q$, *avec* $Q(\alpha) \neq 0$.

(iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ *et* $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque.
Par analogie avec la dérivée d'une fonction, si

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$$

alors le polynôme

$$P'(X) = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}$$

est le polynôme dérivé de P.

3.2 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 2 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.**
Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

Exemple 5.
Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels : $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors P admet 2 racines réelles distinctes $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors P admet 2 racines complexes distinctes $\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle double $\frac{-b}{2a}$.

En tenant compte des multiplicités on a donc toujours exactement 2 racines.

Exemple 6.
Soit

$$P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4.$$

considéré comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$. P n'a qu'une seule racine (qui est simple) $\alpha = \frac{2}{3}$ et il se décompose comme suit

$$P(X) = 3\left(X - \frac{2}{3}\right)\left(X^2 + 2\right).$$

Si on considère maintenant P comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ alors

$$P(X) = 3\left(X - \frac{2}{3}\right)\left(X - i\sqrt{2}\right)\left(X + i\sqrt{2}\right)$$

et admet 3 racines simples.

3.3 Polynômes irréductibles

Définition 7.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré ≥ 1, on dit que P est irréductible si pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ divisant P, alors, soit $Q \in \mathbb{R}^*$, soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Remarque.

- Un polynôme irréductible P est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de P sont les constantes ou P lui-même (à une constante multiplicative près).
- Dans le cas contraire, on dit que P est réductible. Il existe alors des polynômes A, B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = AB$, avec $\deg(A) \geq 1$ et $\deg(B) \geq 1$.

Exemple 7.

- Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Par conséquent il y a une infinité de polynômes irréductibles.
- $X^2 - 1 = (X-1)(X+1) \in \mathbb{R}[X]$ est réductible.
- $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ est réductible dans $\mathbb{C}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 3 (Théorème de factorisation)**.**
Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont des polynômes irréductibles distincts.
De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

3.4 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème 4.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Donc pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ la factorisation s'écrit
$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}$$
où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines distinctes de P et $k_1, \ldots, k_r$ sont leurs multiplicités.

Théorème 5.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 ayant un discriminant $\Delta < 0$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors la factorisation s'écrit
$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}Q_1^{\ell_1}\cdots Q_s^{\ell_s}$$
où les α_i sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité k_i et les Q_i sont des polynômes irréductibles de degré 2 : $Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i$ avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Exemple 8.
$P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ alors que sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2(X-j)(X-j^2)$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Exemple 9.
Soit $P(X) = X^4 + 1$.

- Sur $\mathbb{C}$. On peut d'abord décomposer $P(X) = (X^2+i)(X^2-i)$. Les racines de P sont donc les racines carrées complexes de i et $-i$. Ainsi P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$:
$$P(X) = \left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right).$$
- Sur $\mathbb{R}$. Pour un polynôme à coefficient réels, si α est une racine alors $\bar{\alpha}$ aussi. Dans la décomposition ci-dessus on regroupe les facteurs ayant des racines conjuguées, cela doit conduire à un polynôme réel :
$$\begin{aligned} P(X) &= \left[\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\right]\left[\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\right] \\ &= \left[X^2 + \sqrt{2}X + 1\right]\left[X^2 - \sqrt{2}X + 1\right], \end{aligned}$$
qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

4 Fractions rationnelles

Définition 8.
Une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme
$$F = \frac{P}{Q}$$
où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont deux polynômes et $Q \neq 0$.

Toute fraction rationnelle se décompose comme une somme de fractions rationnelles élémentaires que l'on appelle des « éléments simples ». Mais les éléments simples sont différents sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)**.**
Soit P/Q une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, et $Q = (X-\alpha_1)^{k_1}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}$. Alors il existe une et une seule écriture :
$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = E &+ \frac{a_{1,1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{a_{1,2}}{(X-\alpha_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{(X-\alpha_1)} \\ &+ \frac{a_{2,1}}{(X-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{a_{2,k_2}}{(X-\alpha_2)} \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

Le polynôme E s'appelle la partie polynomiale (ou partie entière). Les termes $\dfrac{a}{(X-\alpha)^i}$ sont les éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Exemple 10.

- Vérifier que
$$\frac{1}{X^2+1} = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i}$$
avec $a = \frac{1}{2}i$, $b = -\frac{1}{2}i$.
- Vérifier que
$$\frac{X^4-8X^2+9X-7}{(X-2)^2(X+3)} = X+1+\frac{-1}{(X-2)^2}+\frac{2}{X-2}+\frac{-1}{X+3}$$
.

Méthode : Comment se calcule cette décomposition ?
En général on commence par déterminer la partie polynomiale,

- Si $\deg(Q) > \deg(P)$ alors $E(X) = 0$
- Si $\deg(P) \leq \deg(Q)$ alors effectuons la division euclidienne de P par Q. On obtient
$$P = QE + R \qquad \text{donc} \qquad \frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q} \qquad \text{où} \qquad \deg(R) < \deg(Q).$$
La partie polynomiale est donc le quotient de cette division. Et on est alors ramené au cas d'une fraction $\dfrac{R}{Q}$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$.

Voyons en détails comment continuer sur un exemple.

Exemple 11.
Décomposons la fraction
$$\frac{P}{Q} = \frac{X^5-2X^3+4X^2-8X+11}{X^3-3X+2}.$$

- **Première étape : partie polynomiale.** On calcule la division euclidienne de P par Q
$$P(X) = (X^2+1)Q(X) + 2X^2 - 5X + 9.$$
Donc la partie polynomiale est $E(X) = X^2+1$ et la fraction s'écrit
$$\frac{P(X)}{Q(X)} = X^2+1+\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}.$$
Notons que pour la fraction $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$ le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.
- **Deuxième étape : factorisation du dénominateur.** Q a pour racine évidente $+1$ (racine double) et -2 (racine simple) et se factorise donc ainsi
$$Q(X) = (X-1)^2(X+2)$$
- **Troisième étape : décomposition théorique en éléments simples.** Le théorème de décomposition en éléments simples nous dit qu'il existe une unique décomposition :
$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$$
Nous savons déjà que $E(X) = X^2+1$, il reste à trouver les nombres a, b, c.

- **Quatrième étape : détermination des coefficients.** Voici une première façon de déterminer a, b et c. On écrit
$$\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+2}=\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$$
On développe et par identification termes à termes on peut déterminer les coefficients a, b et c.
$$\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+2}=\frac{(b+c)X^2+(a+b-2c)X+2a-2b+c}{(X-1)^2(X+2)}=\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$$
On en déduit $b+c=2$, $a+b-2c=-5$ et $2a-2b+c=9$. Cela conduit à l'unique solution $a=2$, $b=-1$, $c=3$. Donc
$$\frac{P}{Q}=\frac{X^5-2X^3+4X^2-8X+11}{X^3-3X+2}=X^2+1+\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{-1}{X-1}+\frac{3}{X+2}.$$
Cette méthode est souvent la plus longue.

- **Quatrième étape (bis) : détermination des coefficients.** Voici une autre méthode plus efficace.

  On note
$$F(X)=\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}$$
On a alors
$$F(X)=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+2}$$
Pour déterminer a on multiplie la fraction F par $(X-1)^2$ et on évalue en $X=1$.

  Tout d'abord en partant de la décomposition on a :
$$F_1(X)=(X-1)^2F(X)=a+b(X-1)+c\frac{(X-1)^2}{X+2}\quad \text{donc}\quad F_1(1)=a$$
D'autre part
$$F_1(X)=(X-1)^2\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}=\frac{2X^2-5X+9}{X+2}$$
donc $F_1(1)=2$. On en déduit $a=2$.

  On fait le même processus pour déterminer c. On multiplie par $(X+2)$ et on évalue en $X=-2$.
$$F_2(X)=(X+2)\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}=\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2}=a\frac{X+2}{(X-1)^2}+b\frac{X+2}{X-1}+c$$
On obtient d'une part $F_2(-2)=c$ et d'autre part $F_2(-2)=3$. Ainsi $c=3$.

  Pour déterminer b on peut réécrire
$$\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+2}$$
en $X=0$, on obtient
$$\frac{9}{2}=a-b+\frac{c}{2}$$
Donc $b=a+\frac{c}{2}-\frac{9}{2}=-1$.

Théorème 7 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$).
Soit P/Q une fraction rationnelle avec $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. Alors P/Q s'écrit de manière unique comme somme :

- *d'une partie polynomiale $E(X)$,*
- *d'éléments simples du type $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$,*

- *d'éléments simples du type* $\frac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^i}$.

Où les $X-\alpha$ *et* $X^2+\alpha X+\beta$ *sont les facteurs irréductibles de* $Q(X)$ *et les exposants* i *sont inférieurs ou égaux à la puissance correspondante dans cette factorisation.*

Exemple 12.
Décomposition en éléments simples de

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{3X^4+5X^3+11X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2(X-1)}.$$

Comme $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $E(X) = 0$. Le dénominateur est déjà factorisé sur $\mathbb{R}$ car X^2+X+1 est irréductible. La décomposition est donc

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{aX+b}{(X^2+X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{e}{X-1}.$$

Il faut ensuite mener au mieux les calculs pour déterminer les coefficients afin d'obtenir :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-1}{X^2+X+1} + \frac{3}{X-1}.$$

5 Exercices

Vous pouvez continuer à vous exercer sur votre espace jai20enmaths, où vous y retrouverez des notions de cours ainsi que des exercices corrigés. Si vous remarquez une erreur ou avez une suggestion pour que cet espace de travail soit plus agréable à utiliser, ne surtout pas hésiter à me le signaler par mail à `a.gere@istom.fr`.

Exercice 1

Pour chacun des polynômes suivants, donner son coefficient dominant ainsi que son degré.

1. $P_0 = 1+\sqrt{3}X - 2X^2$
2. $P_1 = X^7 + 4X^8 + (1-\mathrm{i})X^3$
3. $P_2 = 3X\left(1+X^2\right) + 2X^3 - 1$
4. $P_3 = (\mathrm{i}+X)\left(1+3X^2-\mathrm{i}X\right)$
5. $P_4 = \sum_{k=1}^{4}(k!+1)X^k$
6. $P_5 = \left(3X-7X^2+4\right)'$
7. $P_6 = [X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)]'$
8. $P_7 = (1-X^n)(1+X)^2 + X^{n+2}, \quad n \geq 0$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0000]

Exercice 2

Soient a, b des réels, et

$$P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1.$$

Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Indication ▼ Correction ▼ [15.0001]

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

1. $P\left(X^2\right)=\left(X^2+1\right)P(X)$
2. $\left(P'\right)=4P$
3. $P\circ P=P$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0002]

Exercice 4

Calculer le quotient et le reste de la division eudidienne de

1. $X^4+5X^3+12X^2+19X-7$ par X^2+3X-1
2. $X^4-4X^3-9X^2+27X+38 \mathrm{par} X^2-X-7$
3. X^5-X^2+2 par X^2+1

Indication ▼ Correction ▼ [15.0003]

Exercice 5

Soit $A(X)=X^6-X^4+2X^3-X+1$ et $B(X)=X^2-2X+2$.

1. Effectuer la division eudidienne de A par B.
2. En déduire la valeur de $A(1+i)$.

Indication ▼ Correction ▼ [15.0004]

Exercice 6

Dterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$A(X)=X^5-5X^4+14X^3-22X^2+17X-5$$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0005]

Exercice 7

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$Q_0=X^2+1 \qquad Q_1=X^2-3X-4 \qquad Q_2=X^2-2X+2 \qquad Q_3=X^3-8$$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0006]

Exercice 8

Soit P et Q les deux polynômes définis par $P(X)=2X^3+5x-1$ et $Q(X)=-X^2+3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants :

1. $P+Q$
2. PQ
3. $P^2(X)$
4. $P\left(X^2\right)$
5. $P\circ Q$
6. $Q\circ P$
7. $3P^3Q-Q\circ P^2$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0007]

Exercice 9

Déterminer tous les polynômes réels vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. $P(1)=0$ et $P(2)=0$
2. $P(1)=1$ et $P(2)=2$
3. $XP'=P$
4. $\left(X^2+1\right)P''=6P$
5. $P(0)=00$; $P(1)=1$; $P'(0)=2$ et $P'(1)=3$.

Indication ▼ Correction ▼ [15.0008]

Exercice 10

Soit $P(X)=X^3-2X^2-5X+6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X+2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2 .
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations

$$(\ln x)^3-2(\ln x)^2-5\ln x+6>0 \qquad \text{et} \qquad e^{2x}-2e^x\leqslant 5-6e^{-x}$$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0009]

Exercice 11

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

1. $F=\dfrac{X}{X^2-4}$
2. $G=\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$
3. $H=\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$
4. $K=\dfrac{X+1}{X^4+1}$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0010]

Exercice 12

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

1. $F=\dfrac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$
2. $G=\dfrac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$
3. $H=\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$
4. $K=\dfrac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0011]

Exercice 13

Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$
2. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
3. $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$
4. $\dfrac{2X}{X^2+1}$

5. $\dfrac{1}{X^2+X+1}$

6. $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$

7. $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$

8. $\dfrac{1}{X^4+X^2+1}$

Indication ▼ Correction ▼ [15.0012]

Indication pour l'exercice 1 ▲

coming.

Indication pour l'exercice 2 ▲

coming.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Déterminer d'abord le degré éventuel d'une solution.

Indication pour l'exercice 4 ▲

coming.

Indication pour l'exercice 5 ▲

coming.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Calculer $A(1)$, $A'(1)$, $\ldots$

Indication pour l'exercice 7 ▲

coming.

Indication pour l'exercice 8 ▲

coming.

Indication pour l'exercice 9 ▲

coming.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Indication pour l'exercice 11 ▲

Pour G et H, commencer par faire une division euclidienne pour trouver la partie polynomiale.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Les fractions F, K ont une partie polynomiale, elles s'écrivent
$F = X^2 + X + 1 + \frac{X^2+X+1}{X^3-X}$
$K = X + 1 + \frac{4X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$

Indication pour l'exercice 13 ▲

coming.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. P_0 a pour degré 2 et coefficient dominant -2.
2. $P_1 = 4X^8 + X^7 + (1-\mathrm{i})X^3$ et a pour degré 8 et coefficient dominant 4.
3. $P_2 = 5X^3 + 3X - 1$ et a pour degré 3 et coefficient dominant 5.
4. P_3 est le produit d'un polynôme de degré 1 à coefficient dominant 1, avec un polynôme de degré 2 à coefficient dominant 3, P_3 est donc de degré 3 et à coefficient dominant 3.
5. P_4 est de degré 4 et à coefficient dominant $(4!+1)$, c'est-à-dire 25.
6. $P_5 = -14X + 3$ est de degré 1 et à coefficient dominant -14. C'est en fait le polynôme dérivé d'un polynôme de degré 2 à coefficient dominant -7.
7. Le polynôme $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)$ est de degré 5 et unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) ; P_6 est son polynôme dérivé, il est donc de degré 4, et de coefficient dominant 5.
8. $P_7 = (1-X^n)(1+X)^2 + X^{n+2} = 1 + 2X + X^2 - X^n - 2X^{n+1}$.
   - si $\boldsymbol{n} = 0, P_7 = X^2$; il est de degré 2, de coefficient dominant 1 ;
   - si $n = 1, P_7 = 1 + X - X^2$; il est de degré 2, de coefficient dominant -1 ;
   - si $\boldsymbol{n} \geq 2$, alors $n+1 \geq 3$ donc P_7 est de degré $(n+1)$, de coefficient dominant -2 .

Correction de l'exercice 2 ▲

Si $P = Q^2$ est le carré d'un polynôme, alors Q est nécessairement de degré 2 , et son coefficient dominant est égal à 1 ou est égal à -1 . Dans le premier cas, on peut donc écrire $Q(X) = X^2 + cX + d$. On a alors

$$Q^2(X) = X^4 + 2cX^3 + \left(2d + c^2\right) X^2 + 2cdX + d^2$$

Par identification, on doit avoir $2c = 2a, 2d + c^2 = b, 2cd = 2$ et $d^2 = 1$. On trouve donc $c = a$ et $d = \pm 1$. Si $d = 1$, alors $c = 1$, et donc $a = 1$ et $b = 3$. Si $d = -1$, alors $c = -1, a = -1$ et $b = -1$. Les deux solutions sont donc

$$P_1(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = \left(X^2 + X + 1\right)^2$$
$$P_2(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = \left(X^2 - X - 1\right)^2$$

Dans le deuxième cas, on écrit $Q(X) = -R(X)$ avec $R(X) = X^2 + cX + d$, de sorte que $Q^2(X) = R^2(X)$ et on retrouve en réalité le cas précédent.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Le polynôme nul est évidemment solution. Sinon, si P est solution, alors on a

   $$2\deg(P) = \deg(P) + 2$$

   ce qui prouve que $\deg(P)$ doit être égal à 2. Maintenant, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

   $$P\left(X^2\right) = aX^4 + bX^2 + c$$
   $$\left(X^2+1\right) P(X) = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$$

   On en déduit que $b = 0$, puis que $a + c = 0$. Les solutions sont donc les polynômes qui s'écrivent $P(X) = a\left(X^2 - 1\right), a \in \mathbb{R}$.

2. Là encore, le polynôme nul est solution, et c'est la seule solution constante. Par ailleurs, si P est une solution non constante, alors son degré vérifie l'équation

$$2(\deg(P)-1)=\deg(P)$$

ce qui entraîne que $\deg(P)=2$. Maintenant, si $P(X)=aX^2+bX+c$, alors

$$\begin{aligned} P'^2 &= (2aX+b)^2 = 4a^2X^2+4abX+b^2 \\ 4P &= 4aX^2+4bX+4c \end{aligned}$$

Ceci entraîne $a^2=a$, donc $a=1$ (le polynôme est de degré $2, a\neq 0$), puis $c=b^2/4$. Les polynômes solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes $P(X)=X^2+bX+b^2/4$, avec $b\in\mathbb{R}$.

3. Si P est une solution qui n'est pas le polynôme nul, alors le degré de $P\circ P$ vaut $\deg(P)^2$, et donc on a l'équation

$$\deg(P)^2=\deg(P)$$

et donc $\deg(P)=1$ ou $\deg(P)=0$. Maintenant, si $P(X)=aX+b$, alors

$$\begin{aligned} P\circ P(X) &= a(aX+b)+b = a^2X+(ab+b) \\ P(X) &= aX+b \end{aligned}$$

On doit donc avoir $a^2=a$, soit $a=1$ ou $a=0$, et $\boldsymbol{a}=0$. Si $a=1$, alors $b=0$ et si $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, alors b peut être quelconque dans $\mathbb{R}$. Finalement, on trouve que les solutions sont les polynômes constants et le polynôme $P(X)=X$.

Correction de l'exercice 4 ▲

On trouve les résultats suivants :

1. Le quotient est X^2+2X+7, le reste est nul ;
2. Le quotient est X^2-3X-5, le reste est $X+3$;
3. Le quotient est X^3-X-1, le reste est $X+3$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On trouve $A(X)=\left(X^4+2X^3+X^2-2\right)B(X)-5X+5$.
2. On vérifie facilement que

$$B(1+i)=(1+i)^2-2(1+i)+2=0.$$

On en déduit que

$$A(1+i)=-5(1+i)+5=-5i.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

On a

$$A'(X) = 5X^4 - 20X^3 + 42X^2 - 44X + 17$$
$$A''(X) = 20X^3 - 60X^2 + 84X - 44$$
$$A^{(3)}(X) = 60X^2 - 120X + 84$$

de sorte que $A(1) = A'(1) = A''(1) = 0$ et $A^{(3)}(1) = 24 \neq 0$ donc 1 est racine de A de multiplicité 3.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Q_0 est un polynôme de degré 2 qui n'a pas de racine réelle donc il est irréductible sur $\mathbb{R}$. Il a deux racines complexes qui sont i et $-\boldsymbol{i}$. Une factorisation dans $\mathbb{C}[\boldsymbol{X}]$ est par exemple
$$Q_0 = (X - i)(X + i)$$

2. Le discriminant de Q_1 vaut $25.Q_1$ admet donc deux racines réelles, $\frac{3+5}{2}$ et $\frac{3-5}{2}$ soit respectivement 4 et -1 . On peut donc factoriser Q_1 de la façon suivante à la fois dans $\mathbb{R}[\boldsymbol{X}]$ et $\mathbb{C}[X]$
$$Q_1 = (X - 4)(X + 1).$$

3. Ici le discriminant de Q_2 vaut : $(-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = (2i)^2$. Q_2 est donc irréductible sur $\mathbb{R}$. Ses deux racines complexes sont donc $\frac{2+2i}{2}$ et $\frac{2-2i}{2}$ soient respectivement $1 + i$ et $\mathbf{1} - \boldsymbol{i}$. On peut donc factoriser Q_2 de la façon suivante dans $\mathbb{C}[X]$:
$$Q_2 = (X - 1 - i)(X - 1 + i).$$

4. Pour Q_3 la méthode diffère un peu. On commence par observer que 2 est racine évidente (il est à noter que Q_3 étant de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$ implique que Q_3 a une racine réelle). On effectue ensuite la division eudidienne de Q_3 par $X - 2$ ce qui permet de le mettre sous forme de produit d'un polynôme de degré 1 et un de degré 2 puis d'étudier la factorisation de ce dernier avec les mêmes outils que ceux utilisés pour les polynômes Q_0, Q_1 et Q_2. On trouve $X^3 - 8 = (X - 2)\left(X^2 + 2X + 4\right)$. En effet :

$$\begin{array}{rcr|l}
X^3 & - & 8 & X - 2 \\ \cline{4-4}
X^3 & - & 2X^2 & X^2 + 2X + 4 \\ \cline{1-3}
2X^2 & - & 8 & \\
2X^2 & - & 4X & \\ \cline{1-3}
4X & - & 8 & \\
4X & - & 8 & \\ \cline{1-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Le discriminant de $X^2 + 2X + 4$ vaut $-12 = (2\sqrt{3}i)^2$ donc ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{R}$ et on peut factoriser Q_3 dans $\mathbb{R}[X]$ par : $Q_3 = (X - 2)\left(X^2 + 2X + 4\right)$. On déduit une factorisation de Q_3 dans $\mathbb{C}[X]$ en calculant les deux racines complexes de $X^2 + 2X + 4$:
$$Q_3 = (X - 2)(X + 1 + i\sqrt{3})(X + 1 - i\sqrt{3}).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P + Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = \left(2X^3 + 5X - 1\right)^2 = 4X^6 + 25X^2 + 1 + 20X^4 - 4X^3 - 10X = 4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1$

- $P\left(X^2\right)=2\left(X^2\right)^3+5\left(X^2\right)-1=2X^6+5X^2-1$
- $P\circ Q=2\left(-X^2+3X\right)^3+5\left(-X^2+3X\right)-1=-2X^6+18X^5-54X^4+54X^3-5X^2+15X-1$
- $Q\circ P=-\left(2X^3+5X-1\right)^2+3\left(2X^3+5X-1\right)=-\left(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1\right)+6X^3+15X-3=-4X^6-20X^4+10X^3-25X^2+25X-4$
- $3P^3Q-Q\circ P^2=3\left(2X^3+5X-1\right)^3\left(-X^2+3X\right)+\left(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1\right)^2-3\,(4X^6+20X^4-4X^3+$ $=(8X^9+125X^3-1+60X^7+150X^5-12X^6+6X^3-75X^2+15X-60X^4)\left(-3X^2+9X\right)+(16X^{12}+400X^8+16X^6+$ $160X^7+1000X^6-400X^5+40X^4-200X^5+80X^4-8X^3-500X^3+50X^2-20X)-12X^6-60X^4+12X^3-75X^2+30X-3=\left(8X^9+60X^7-12X^6+150X^5-60X^4+131X^3-75X^2+15X-1\right)\left(-3X^2+9X\right)+16X^{12}+160X^{10}-32X^9+600X^8-240X^7+1012X^6-600X^5+685X^4-496X^3+75X^2+10X-2=(-24X^{11}+72X^{10}-180X^9+$ $393X^5+1179X^4+225X^4-675X^3-45X^3+135X^2+3X^2-9X)+16X^{12}+160X^{10}-32X^9+600X^8-240X^7+1012X^6-600X^5+685X^4-496X^3+75X^2+10X-2=16X^{12}-24X^{11}+232X^{10}-212X^9+1176X^8-798X^7+2542X^6-1533X^5+2089X^4-1216X^3+213X^2+X-2$ Merci la machine !

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Le polynôme P est donc factorisable par $X-1$ et par $X-2$, c'est-à-dire que $P=(X-1)(X-2)\,Q$, avec $Q\in\mathbb{R}[X]$.
2. Il suffit de constater que les deux conditions données reviennent à dire que $P(X)-X$ vérifie les conditions de la question 1. Autrement dit, on a $P(X)-X=(X-1)(X-2)Q(X)$, soit $P(X)=X+(X-1)(X-2)Q(X)$, avec toujours $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$.
3. Si $P(X)=\sum_{k=0}^{k=n}a_kX^k$, on aura $P'(X)=\sum_{k=1}^{k=n}ka_kX^{k-1}$, donc $XP'(X)=\sum_{k=1}^{k=n}ka_kX^k$. Par identification, on aura $XP'=P$ si $a_0=0$ et, $\forall k\in\{1;\ldots;n\},a_k=ka_k$. Autrement dit, a_1 peut valoir n'importe quoi, mais tous les autres coefficients doivent être nuls. Celà revient à dire que P est de la forme $P=aX$, avec $a\in\mathbb{R}$.
4. Constatons pour commencer que le polynôme nul et solution de l'équation proposée. Intéressonsnous ensuite au degré d'un polynôme P vérifiant la condition demandée : si le terme dominant de P est de la forme a_nX^n (avec $a_n\neq 0$), alors celui de P'' sera $n(n-1)a_nX^{n-2}$, donc celui de $\left(X^2+1\right)P''$ sera égal à $n(n-1)a_nX^n$ (tous les autres termes étant de degré inférieur). L'égalité demandée implique donc en particulier que $n(n-1)a_nX^n=6a_nX^n$, c'est-à-dire que $n(n-1)=6$, ou encore $n^2-n-6=0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta=1+24=25$, et admet deux solutions $n_1=\frac{1-5}{2}=-2$ et $n_2=\frac{1+5}{2}=3$. Le degré d'un polynôme pouvant difficilement être égal à -2 , notre P est donc de degré 3. Autrement dit, $P=aX^3+bX^2+cX+d$, donc $P''=6aX+2b$, et $\left(X^2+1\right)P''=6aX^3+2bX^2+6aX+2b$. Par identification, les coefficients du polynôme P doivent vérifier $6a=6a;6b=2b;6c=6a$ et $6d=2b$. On en déduit que $b=d=0$, et $c=a,a$ pouvant valoir n'importe quoi. Autrement dit, $P=a\left(X^3+X\right)$, avec $a\in\mathbb{R}$
5. On peut constater à l'aide des deux premières conditions, de façon similaire à ce que nous avions fait an 2, que $P(X)-X$ admet 0 et 1 pour racines, et peut donc s'écrire sous la forme $X(X-1)Q(X)$. Autrement dit, on a $P(X)=X+X(X-1)Q(X)$. On en déduit que $P'(X)=1+(X-1)Q(X)+XQ(X)+X(X-1)Q'(X)=1+(2X-1)Q(X)+X(X-1)Q'(X)$. Les deux dernières conditions peuvent alors s'exprimer sous la forme $P'(0)=1-Q(0)=2$, et $P'(1)=1+Q(1)=3$, donc $Q(0)=-1$ et $Q(1)=2$. Le polynôme $3X-1$ prenant respectivement les valeurs -1 en 0 et 2 en 1 , on peut constater que $Q(X)-(3X-1)$ a pour racines 0 et 1 , autrement dit que $Q(X)=3X-1+X(X-1)R(X)$. En reprenant l'expression précédente de P, on obtient donc $P(X)=X+X(X-1)(3X-1+X(X-1)R(X))=X+\left(X^2-X\right)(3X-1)+X^2(X-1)^2R(X)=2X-4X^2+3X^3+X^2(X-1)^2R(X)$, avec $R\in\mathbb{R}[X]$. Une autre façon de voir les choses est de dire que les conditions données imposent que le reste de la division euclidienne de P par $X^2(X-1)^2$ soit égal à $2X-4X^2+3X^3$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Il y a une racine très évidente qui est 1 . On peut aussi constate (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8 - 2 \times 4 - 5 \times (-2) + 6 = 0$.

2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X+2)Q(X) = (X+2)\left(aX^2 + bX + c\right) = aX^3 + (2a + b)X^2 + (2b+c)X + 2c$. Par identification, on obtient $a = 1; 2a + b = -2; 2b + c = -5$ et $2c = 6$, donc $a = 1; b = -4$ et $c = 3$, soit $P(X) = (X+2)\left(X^2 - 4X + 3\right)$.

3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X+1)(X-1)(X-3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-2		1		3	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2; 1[\cup]3; +\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2}; e[\cup]e^3; +\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leqslant 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1; 3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geqslant 0$, soit $\mathcal{S} = [0; \ln 3]$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. $F = \frac{X}{X^2-4}$.

   Commençons par factoriser le dénominateur : $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$, d'où une décomposition en éléments simples du type $F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+2}$. En réduisant au même dénominateur, il vient $\frac{X}{X^2-4} = \frac{(a+b)X + 2(a-b)}{X^2-4}$ et en identifiant les coefficients, on obtient le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2(a-b) = 0 \end{cases}$. Ainsi $a = b = \frac{1}{2}$ et

$$\frac{X}{X^2-4} = \frac{\frac{1}{2}}{X-2} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}$$

2. $G = \frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$.

   Lorsque le degré du numérateur (ici 3) est supérieur ou égal au degré du dénominateur (ici 1), il faut effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour faire apparaître la partie polynomiale (ou partie entière). Ici la division euclidienne s'écrit $X^3 - 3X^2 + X - 4 = (X-1)(X^2 - 2X - 1) - 5$. Ainsi en divisant les deux membres par $X - 1$ on obtient

$$\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X-1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}$$

   La fraction est alors déjà décomposée en éléments simples.

3. $H = \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$.

   Commençons par faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur : $2X^3 + X^2 - X + 1 = (X^2 - 2X + 1)(2X+5) + 7X - 4$, ce qui donne $H = 2X + 5 + \frac{7X-4}{X^2-2X+1}$. Il reste à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $H_1 = \frac{7X-4}{X^2-2X+1}$. Puisque le dénominateur se factorise en $(X-1)^2$, elle sera de la forme $H_1 = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1}$. En réduisant au même dénominateur, il vient $\frac{7X-4}{X^2-2X+1} = \frac{bX+a-b}{X^2-2X+1}$ et en identifiant les coefficients, on obtient $b = 7$ et $a = 3$. Finalement,

$$\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1} = 2X + 5 + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{7}{X-1}$$

4. $K = \frac{X+1}{X^4+1}$.

Ici, il n'y a pas de partie polynomiale puisque le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Le dénominateur admet quatre racines complexes $e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. En regroupant les racines complexes conjuguées, on obtient sa factorisation sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X^4+1 &= \left((X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{i\pi}{4}})\right)\left((X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}})\right) \\ &= \left(X^2-2\cos\tfrac{\pi}{4}+1\right)\left(X^2-2\cos\tfrac{3\pi}{4}+1\right) \\ &= (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1) \end{aligned}$$

Puisque les deux facteurs $(X^2-\sqrt{2}X+1)$ et $(X^2+\sqrt{2}X+1)$ sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples de K est de la forme $K = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$.

En réduisant au même dénominateur et en identifiant les coefficients avec ceux de $K = \frac{X+1}{X^4+1}$, on obtient le système

$$\begin{cases} a+c=0 \\ \sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d=0 \\ a+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}d=1 \\ b+d=1 \end{cases}$$

Système que l'on résout en $a = \frac{-\sqrt{2}}{4}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $d = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Ainsi

$$\frac{X+1}{X^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{2+\sqrt{2}}{4}}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$.

Pour obtenir la partie polynomiale, on fait une division euclidienne : $X^5+X^4+1 = (X^3-X)(X^2+X+1)+X^2+X+1$. Ce qui donne $F = X^2+X+1+F_1$, où $F_1 = \frac{X^2+X+1}{X^3-X}$. Puisque $X^3-X = X(X-1)(X+1)$, la décomposition en éléments simples est de la forme

$$F_1 = \frac{X^2+X+1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

Pour obtenir a :

- on multiplie l'égalité par X : $\frac{X(X^2+X+1)}{X(X-1)(X+1)} = X\left(\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}\right)$,
- on simplifie $\frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+1)} = a + \frac{bX}{X-1} + \frac{cX}{X+1}$,
- on remplace X par 0 et on obtient $-1 = a+0+0$, donc $a = -1$.

De même, en multipliant par $X-1$ et en remplaçant X par 1, il vient $b = \frac{3}{2}$. Puis en multipliant par $X+1$ et en remplaçant X par -1, on trouve $c = \frac{1}{2}$.

D'où

$$\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2+X+1-\frac{1}{X}+\frac{\frac{1}{2}}{X+1}+\frac{\frac{3}{2}}{X-1}$$

2. $G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$.

La partie polynomiale est nulle. La décomposition en éléments simples est de la forme $G = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1}$.

- En multipliant les deux membres de l'égalité par $(X-1)^3$, en simplifiant puis en remplaçant X par 1, on obtient $a=\frac{3}{2}$.
- De même, en multipliant par $X+1$, en simplifiant puis en remplaçant X par -1, on obtient $d=\frac{1}{8}$.
- En multipliant par X et en regardant la limite quand $X\to+\infty$, on obtient $1=c+d$. Donc $c=\frac{7}{8}$.
- En remplaçant X par 0, il vient $-1=-a+b-c+d$. Donc $b=\frac{5}{4}$.

Ainsi :

$$G=\frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}=\frac{\frac{3}{2}}{(X-1)^3}+\frac{\frac{5}{4}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{7}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}$$

3. $H=\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$.
Puisque X^2+1 et X^2+4 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples sera de la forme

$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}=\frac{aX+b}{X^2+1}+\frac{cX+d}{X^2+4}$$

- En remplaçant X par 0, on obtient $0=b+\frac{1}{4}d$.
- En multipliant les deux membres par X, on obtient $\frac{X^2}{(X^2+1)(X^2+4)}=\frac{aX^2+bX}{X^2+1}+\frac{cX^2+dX}{X^2+4}$. En calculant la limite quand $X\to+\infty$, on a $0=a+c$.
- Enfin, en évaluant les fractions en $X=1$ et $X=-1$, on obtient $\frac{1}{10}=\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{5}$ et $\frac{-1}{10}=\frac{-a+b}{2}+\frac{-c+d}{5}$.

La résolution du système donne $b=d=0$, $a=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{3}$ et donc

$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}=\frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1}-\frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4}$$

4. $K=\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.
Pour la partie polynomiale, on fait la division euclidienne :

$$2X^4+X^3+3X^2-6X+1=(2X^3-X^2)(X+1)+(4X^2-6X+1)$$

ce qui donne $K=X+1+K_1$ où $K_1=\frac{4X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$. Pour trouver la décomposition en éléments simples de K_1, on factorise son numérateur : $2X^3-X^2=2X^2(X-\frac{1}{2})$, ce qui donne une décomposition de la forme $K_1=\frac{a}{X^2}+\frac{b}{X}+\frac{c}{X-\frac{1}{2}}$.
On obtient alors a en multipliant les deux membres de l'égalité par X^2 puis en remplaçant X par 0 : $a=-1$. On obtient de même c en multipliant par $X-\frac{1}{2}$ et en remplaçant X par $\frac{1}{2}$: $c=-2$. Enfin on trouve b en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $X=1$, ou mieux en multipliant les deux membres par X et en passant à la limite pour $X\to+\infty$: $b=4$. Finalement :

$$\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}=X+1-\frac{1}{X^2}+\frac{4}{X}-\frac{2}{X-\frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}=1-\frac{8}{X-1}+\frac{13}{X-2}$
2. $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}=\frac{1}{X-1}-\frac{5}{X-2}+\frac{5}{X-3}$

3. $\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1}$
4. $\frac{2X}{X^2+1} = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}$
5. $\frac{1}{X^2+X+1} = -\frac{i/\sqrt{3}}{X-j} + \frac{i/\sqrt{3}}{X-j^2}$
6. $\frac{4}{(X^2+1)^2} = -\frac{1}{(X-\mathrm{i})^2} - \frac{\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}} - \frac{1}{(X+\mathrm{i})^2} + \frac{\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}}$
7. $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = -\frac{1}{X^2} + \frac{5}{X} - \frac{4}{(X+1)^2} - \frac{5}{(X+1)}$
8. $\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{(1-j)/6}{X-j} + \frac{\left(1-j^2\right)/6}{X-j^2} - \frac{(1-j)/6}{X+j} - \frac{\left(1-j^2\right)/6}{X+j^2}$

WolframAlpha	Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur Google Play et l'App Store.	

Etudiez en musique !

DEEZER

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : . . . .

Promotion, groupe : . . . .

Email : . . . .

Auteurs de ces notes de cours

D'après un cours de Arnaud Bodin.
Revu et augmenté par Antoine Géré.
Cours et exercices rédigés par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).