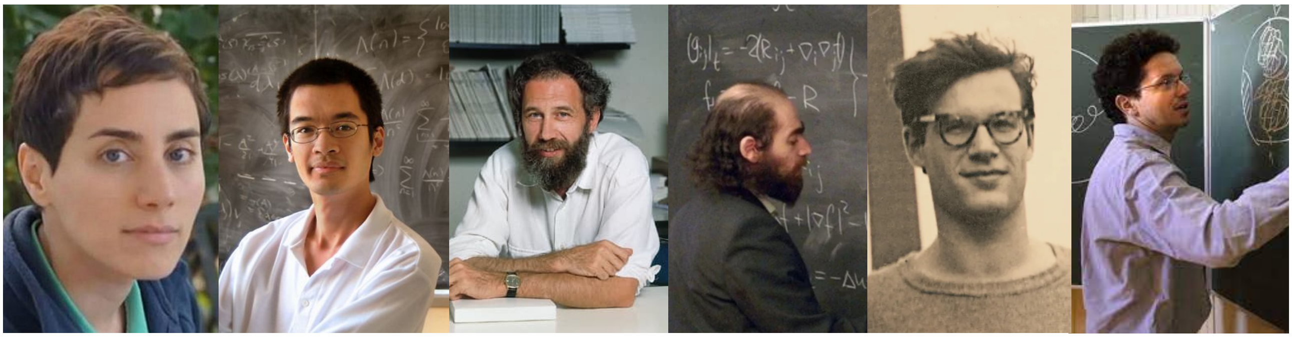
Diagonalisation

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : `a.gere@istom.fr`.

Résumé

Nous abordons ici le problème de diagonalisation des matrices. Une matrice n'est pas en general diagonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice diagonale. Nous allons énoncer des conditions qui déterminent exactement quand une matrice est diagonalisable. Nous verrons quelques applications de cette procédure, ainsi que la méthode de trigonalisation qui peut etre utile lorsque diagonaliser est impossible.

Table des matières

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ici $\mathbb{K}$ designera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention contraire, E sera de dimension finie. Un espace vectoriel est un ensemble d'objets, appelés vecteurs, que l'on peut additionner entre eux, et que l'on peut multiplier par un scalaire (c'est à dire un nombre).

[1] version du 6 novembre 2024

1 Valeurs propres, vecteurs propres

1.1 Définitions

Voici deux transformations simples définies par une matrice.

1. $$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$
   L'application h envoie n'importe quel vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sur son double $2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. $$k : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$
   L'application k envoie les vecteurs du type $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ sur leurs doubles $2\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, alors que les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ sont envoyés sur leurs triples $3\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

Pour une matrice quelconque, il s'agit de voir comment on se ramène à ces situations géométriques simples. C'est ce qui nous amène à la notion de vecteurs propres et valeurs propres.

Commençons par définir les valeurs et les vecteurs propres d'une application linéaire.

Définition 1 (Endomorphisme)**.**
$f : E \to E$ est appelé un endomorphisme si f est une application linéaire de E dans lui-même. Autrement dit, pour tout $v \in E, f(v) \in E$ et, en plus, pour tous $u, v \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

Les deux transformations précédentes, h et k, sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$. On peut ainsi donner la définition suivante de valeurs propres, vecteurs propres de ce types d'applications.

Définissons la matrice d'une application linéaire.

Définition 2.
La matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases[a] $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. On écrit

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

[a] Dire que cette famille de vecteurs est une base signifie que tout vecteurs de l'espace vectoriel (ici $\mathbb{R}^3$), s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de cette base. Par exemple dans le cas de $\mathbb{R}^3$ une base possible est la base habituelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

En termes plus simples : c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$.

Exemple 1.
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{array} \right.$$

Il est utile d'identifier vecteurs lignes et vecteurs colonnes ; ainsi f peut être vue comme l'application

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ x_1-2x_2+3x_3 \end{pmatrix}.$$

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?
   - On a $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = f_1 + f_2$. La première colonne de la matrice est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - De même $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -2) = f_1 - 2f_2$. La deuxième colonne de la matrice est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   - Enfin $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, 3) = -f_1 + 3f_2$. La troisième colonne de la matrice est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Ainsi la matrice A associée à f, de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ s'écrit

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs

   $$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$?
   $f(\epsilon_1) = f(1, 1, 0) = (2, -1) = 3\phi_1 - \phi_2$, $f(\epsilon_2) = f(1, 0, 1) = (0, 4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$, $f(\epsilon_3) = f(0, 1, 1) = (0, 1) = -\phi_1 + \phi_2$, donc

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.

Définition 3 (Valeurs propres, vecteurs propres)**.**
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est dite valeur propre de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur non nul $v \in E$ tel que

  $$f(v) = \lambda v$$

- Le vecteur v est alors appelé vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ.
- Le spectre de f est l'ensemble des valeurs propres de f, noté $\mathrm{sp}(f)$.

Exemple 2.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-2x - 2y + 2z, -3x - y + 3z, -x + y + z).$$

Le vecteur $v_1 = (1, 1, 0)$ est vecteur propre. En effet, $f(1, 1, 0) = (-4, -4, 0)$, autrement dit

$$f(v_1) = -4v_1.$$

Ainsi v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -4$. On a également $v_2 = (0, 1, 1)$ vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$, et $v_3 = (1, 0, 1)$ vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 0$. On peut écrire

l'application f sous forme matricielle

$$f(X) = AX$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$Av_1 = -4v_1, \qquad Av_2 = 2v_2, \text{ et} \qquad Av_3 = 0v_3.$$

On a trois valeurs propres, et il ne peut y en avoir plus car la matrice A est de taille 3×3. On a donc

$$\text{sp}(f) = \{-4, 2, 0\}.$$

Exemple 3.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par

$$f : (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Géométriquement, f est une projection sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Notons que

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

sont les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_2, \ \dots \ , f(e_{n-1}) = e_{n-1}, \quad \text{et} \quad f(e_n) = 0$$

Ainsi $e_1, \dots, e_{n-1}$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1. Et e_n est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. On a alors

$$\text{sp}(f) = \{0, 1\}.$$

En pratique c'est l'écriture matricielle qui nous interessera en premier lieu. Voici la définition de valeurs propres et vecteurs propres pour les matrices.

Définition 4 (Valeurs propres, vecteurs propres pour les matrices).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- λ est dite valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$AX = \lambda X$$

- Le vecteur X est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Exemple 4.
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

- Vérifions que $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. En effet,

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2X_1$$

  Donc X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = -2$.

- Vérifions que $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. On calcule AX_2 et on vérifie que

$$AX_2 = 13X_2$$

  Donc X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 13$

- Vérifions que $\lambda_3 = 7$ est valeur propre de A. Il s'agit donc de trouver un vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $AX_3 = 7X_3$.

$$\begin{aligned} AX_3 = 7X_3 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + 11x_2 - 2x_3 \\ 8x_1 - 7x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \\ 7x_3 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  On résout ce système linéaire et on trouve comme ensemble de solutions

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Autrement dit, les solutions sont engendrées par le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vient de calculer que $AX_3 = 7X_3$.
  Ainsi X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_3 = 7$

1.2 Sous-espaces propres

Cherchons une autre écriture de la relation définissant les vecteurs propres :

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\Longleftrightarrow f(v) - \lambda v = 0 \\ &\Longleftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_E)(v) = 0 \end{aligned}$$

Le sous-espace propre associé à λ est le sous-espace vectoriel E_λ défini comme

$$E_\lambda = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

C'est le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ, auquel on ajoute le vecteur nul. Être valeur propre, c'est donc exactement avoir un sous-espace propre non trivial :

$$\lambda \text{ valeur propre } \iff E_\lambda \neq \{0\}$$

Lemme 1.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de f et, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, soit v_i un vecteur propre associé à λ_i. Alors les v_i sont linéairement indépendants.

Cela implique que le nombre de valeurs propres est $\leq \dim(E)$.

Exemple 5.
Reprenons l'exemple avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-2x - 2y + 2z, -3x - y + 3z, -x + y + z)\,.$$

Nous avions les valeurs propres et vecteurs propres associés suivants

$$\lambda_1 = -4 \quad v_1 = (1,1,0) \qquad \lambda_2 = 2 \quad v_2 = (0,1,1) \qquad \lambda_3 = 0 \quad v_3 = (1,0,1)$$

La famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$.

2 Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique permet de trouver facilement les valeurs propres.

Définition 5.
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$. Le polynôme caractéristique de f est définie comme suit

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Le polynôme caractéristique est indépendant de la matrice A (et du choix de la base B). En effet, si B est la matrice du même endomorphisme f mais dans une autre base B', alors il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On écrit

$$B - \lambda I_n = P^{-1}(A - \lambda I_n)\,P$$

Alors,

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det(P) = \det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda)$$

Théorème 1.

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

$$\begin{aligned} \lambda \ \text{ valeur propre de } \ f &\iff P_f(\lambda) = 0 \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Exemple 6.
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme qui vérifie $f^2 = -f$. Montrons que le polynôme caractéristique est de la forme

$$P_f(\lambda) = \alpha \lambda^a (\lambda + 1)^b$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $a, b \geqslant 0$. Pour cela, cherchons quelle peut être une valeur propre de f. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre, et soit $v \in E \backslash \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\Longrightarrow f(f(v)) = f(\lambda v) \\ &\Longrightarrow -f(v) = \lambda f(v) \quad \text{car } \ f^2 = -f \quad \text{ et } f \text{ est linéaire} \\ &\Longrightarrow -\lambda v = \lambda^2 v \quad \text{car } v \text{ est vecteur propre} \\ &\Longrightarrow -\lambda = \lambda^2 \quad \text{car } v \text{ est non nul} \\ &\Longrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1 \end{aligned}$$

Les seules valeurs propres possibles sont donc 0 ou -1. Les seules racines possibles de $P_f(\lambda)$ sont 0 et -1. Donc

$$P_f(\lambda) = \alpha \lambda^a (\lambda + 1)^b$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, et $a, b \geqslant 0$.

Il est possible de trouver des relations entre valeurs propres pour certains coefficients du polynome caractéristique.

Proposition 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Soit A la matrice de f dans une base B. Le polynôme caractéristique de f est de degré n et vérifie :

$$P_f(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A) \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

Si f admet n valeurs propres, qui sont donc toutes les racines de $P_f(X)$, alors de l'égalité

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

on en déduit

- La somme des valeurs propres vaut $\operatorname{Tr}(A)$
- Le produit des valeurs propres vaut $\det(A)$

Exemple 7.
Nous considérons la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3)\\
&= \det\left(\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ -2 & 11 & -2\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix} - X\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & 3\\ -2 & 11-\lambda & -2\\ 8 & -7 & 6-\lambda\end{vmatrix}\\
&= \cdots\\
&= -\lambda^3+18\lambda^2-51\lambda-182\\
&= -(\lambda+2)(\lambda-7)(\lambda-13).
\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont -2, 7 et 13.

3 Diagonalisation

3.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 6.

- On dit qu'un endomorphisme
$$f : E \to E$$
est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
- Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que
$$P^{-1}AP$$
soit diagonale.

Bien sûr, ces deux définitions se rejoignent.

Proposition 2.
Si A est la matrice de f dans une base B quelconque alors

$$f \text{ est diagonalisable} \iff A \text{ est diagonalisable.}$$

3.2 Conditions de diagonalisation

Proposition 3 (Condition suffisante de diagonalisation)**.**
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n (ou M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$). Si le polynôme caractéristique de f (respectivement de M) admet n racines distinctes, alors f (respectivement M) est diagonalisable.

Cette condition est suffisante mais pas nécessaire. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la matrice unité. Elle est trivialement diagonalisable puisqu'elle est déjà diagonale, pourtant son polynôme caractéristique qui est

$$P_{\mathrm{I}}(\lambda) = (1-\lambda)^n$$

n'a pas de racines simples dès que n est supérieur ou égal à 2.

Exemple 8.
Cette propriété est très pratique. Soit par exemple la matrice A d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il est immédiat qu'elle est diagonalisable puisque son polynôme caractéristique, égal à

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\pi-\lambda)(3-\lambda),$$

admet trois racines distinctes.

Théorème 2 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation).
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n (ou M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$). Afin que f (respectivement M) soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites

1. *Le polynôme caractéristique de f (respectivement de M) se factorise en un produit de polynômes du premier degré (non nécessairement distincts) à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
2. *Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.*

La propriété précédente prouve l'intérêt des deux entiers liés à une valeur propre : son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique et la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

La première condition du théorème 2 signifie que le polynôme caractéristique de f (respectivement de M) s'écrit,

$$P_f(\lambda) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{n_{\lambda_1}} \cdots (X-\lambda_r)^{n_{\lambda_r}}$$

les éléments $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ étant distincts deux à deux. Ce sont les valeurs propres de f. Si un polynôme vérifie cette condition, on dit qu'il est scindé dans $\mathbb{K}$. Par exemple, les polynômes

$$(X-1)^2(X+1), \quad -(X-\pi)(X-1)(X-3)$$

sont scindés dans $\mathbb{R}$ alors que le polynôme X^2+1 ne l'est pas. On peut remarquer que tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé dans $\mathbb{C}$.

Exemple 9.
Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 3e_1 + 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= -e_1 - e_3 \\ f(e_1) &= e_1 + e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

La matrice associé à f dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Première étape : détermination du polynôme caractéristique de f.

  On a

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix},$$

d'où en remplaçant la troisième colonne c_3 par la somme de la deuxième et de la troisième, soit par $c_3 + c_2$, on obtient

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc en remplaçant l_2 par $l_2 - l_3$ on obtient

$$P_f(\lambda) = (1-X) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-X)\Big((3-\lambda)(-\lambda+1)+1\Big)$$

D'où

$$P_f(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2.$$

Le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{R}$. Les valeurs propres sont 2 qui est une valeur propre d'ordre de multiplicité 2, et 1 qui est une racine simple.

- Deuxième étape : détermination de la dimension des sous-espaces propres.

  La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est égale à 1, donc la dimension de E_1 est égale à 1.

  Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 revient à déterminer les vecteurs

  $$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

  de E tels que

  $$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Cette équation matricielle équivaut au système

  $$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & & = 0 \end{cases}$$

  Ce qui équivaut à $x_1 = x_2$, et $x_3 = 0$. Soit $v = x_1(e_1 + e_2)$ donc

  $$E_2 = \text{Vect}(1,1,0)$$

  La dimension de E_2 est égale à 1. Or 2 est une valeur propre double, donc l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Exemple 10.
Soit la matrice A à coefficients dans $\mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Première étape : Détermination du polynôme caractéristique de A.

  On a

  $$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

  d'où en remplaçant la ligne l_1 par $l_1 + l_2 + l_3$ on obtient

  $$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-X & 3-X & 3-X \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (3-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

donc en remplaçant successivement c_2 par $c_2 - c_1$ et c_3 par $c_3 - c_1$ on obtient

$$P_A(\lambda) = (3-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} = (3-X)X^2.$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$. Les valeurs propres sont 0 qui est une valeur propre d'ordre de multiplicité 2, et 3 qui est une racine simple.

- Deuxième étape : détermination de la dimension des sous-espaces propres.

  La dimension du sous-espace associé à une valeur propre simple est égale à 1, donc la dimension de E_3 est égale à 1.

  Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 revient à déterminer les vecteurs $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Cette équation matricielle équivaut à l'équation $x + y + z = 0$. Donc

$$E_0 = \mathrm{Vect}\Big((1, 0, -1), (0, 1, -1)\Big).$$

  La dimension de E_0 est égale à 2. Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. La matrice est donc diagonalisable !

- Troisième étape : recherche d'une base de veteurs propres.

  Les vecteurs propres associé à la valeur propre 0 sont

$$(1, 0, -1), (0, 1, -1).$$

  Le vecteur propre associé à la valeur propre 3 verifie

$$(A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  ce qui nous donne comme vecteur propre $(1, 1, 1)$. On a donc

$$A = PDP^{-1}$$

  avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4 Exercices

j'ai 20 en maths

Vous pouvez continuer à vous exercer sur votre espace jai20enmaths, où vous y retrouverez des notions de cours ainsi que des exercices corrigés. Si vous remarquez une erreur ou avez une suggestion pour que cet espace de travail soit plus agréable à utiliser, ne surtout pas hésiter à me le signaler par mail à `a.gere@istom.fr`.

Exercice 1

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AX où

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et en déduire que X est vecteur propre ; quelle est la valeur propre associée ?

Correction ▼ [04.0013]

Exercice 2

Déterminer les valeurs propres réelles de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ [04.0012]

Exercice 3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-elle diagonalisable ? Justifier

Correction ▼ [04.0018]

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser A.

Correction ▼ [04.0017]

Exercice 5

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Correction ▼ [04.0016]

Exercice 6

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Correction ▼ [04.0019]

Exercice 7

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [04.0020]

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factoriser le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Correction ▼ [04.0021]

Exercice 9

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [04.0022]

Exercice 10

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynome caracteristique de A.
2. Démontrer que A est diagonalisable et determiner une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.
3. Inverser la matrice P.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [04.0015]

Exercice 11

Soit m un nombre réel et A dont la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On suppose $m = 3$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [04.0014]

Exercice 12

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $A = B^2$.

1. Montrer que si B est diagonalisable alors A est diagonalisable. En utilisant la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

justifier que la réciproque est fausse.

2. On veut déterminer les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $A = B^2$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que A est diagonalisable et préciser $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$
   (b) Si $C = P^{-1}BP$, établir que $C \cdot C = D$ puis que C et D commutent.
   (c) En déduire les matrices C qui conviennent puis les solutions du problème.

Correction ▼ [04.0029]

Exercice 13

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Justifier.

2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2.

3. Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).
4. Montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Correction ▼ [04.0025]

Exercice 14

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$

Correction ▼ [04.0001]

Exercice 15

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' & = x + 2y - z \\ y' & = 2x + 4y - 2z \\ z' & = -x - 2y + z \end{cases}$

Correction ▼ [04.0002]

Exercice 16

Soient x, y et z trois applications dérivables sur $\mathbb{R}$ et ω une application trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} \omega''' + \omega'' + \omega' + \omega = 0 \\ \omega(0) = 1,\ \omega'(0) = 0,\ \omega''(0) = 0. \end{cases}$$

2. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2z \\ \dot{y} = x + 3y + 2z \\ \dot{z} = -x - y - z \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1. \end{cases}$$

Correction ▼ [04.0011]

Exercice 17

On considère une matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M.

1. L'endomorphisme f est-il inversible ?
2. Montrer que M est diagonalisable. Trouver une base de vecteurs propres de M. Diagonaliser M.
3. On considère la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que M' admet les mêmes valeurs propres que M.

4. Montrer qu'il existe une une matrice inversible Q telle que $M' = QMQ^{-1}$.

Correction ▼ [04.0004]

Exercice 18

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A puis la diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
3. On considère maintenant trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leurs premiers termes respectifs u_0, v_0 et w_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_n = -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \\ v_n = 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \\ w_n = 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1}. \end{cases}$$
Déterminer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n et u_0, v_0 et w_0.

Correction ▼ [04.0008]

Exercice 19

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A puis diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer A^n.
3. On considère maintenant trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leurs premiers termes respectifs u_0, v_0 et w_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n. \end{cases}$$
Déterminer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n et u_0, v_0 et w_0.

Correction ▼ [04.0009]

Correction de l'exercice 1 ▲

On a

$$AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

X est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

Correction de l'exercice 2 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 3 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 4 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 5 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminons les valeurs propres de M.*

   Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-X \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 3 & -2-2X \end{vmatrix} && (1) \\ &= (1-X)(X^2+2X-8) && (2) \\ &= (1-X)(X+4)(X-2). && (3) \end{aligned}$$

   La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : $1, 2$, et -4.

2. *Montrons que M est diagonalisable.*

   Nous venons de voir que M, matrice réelle 3×3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

3. *Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.*

   Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

   $\lambda = 1$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_1}$ de coordonnées $(1, 1, 1)$.

$\lambda = 2$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_2}$ de coordonnées $(4, 3, -2)$.

$\lambda = -4$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases} -4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_3}$ de coordonnées $(2, -3, 2)$.

Les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. *Exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.*

On a

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix},$$

et $M^k = PD^kP^{-1}$.

Calculons donc la matrice P^{-1} : on a $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}(\mathrm{comP})^t$. Or

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$

et

$$\mathrm{com} P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5.2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5.2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15.2^k - 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 5.2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5.2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 - 5.2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité 2, et 2 avec la multiplicité 1.
Déterminons les sous-espaces propres associés : Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1.
$E_1 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ A.V = V\}$,

$$V \in E_1 \iff \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. \iff x - y + z = 0$$

E_1 est donc un plan vectoriel, dont les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (0,1,1)$ forment une base.
Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2.
$E_2 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ A.V = 2V\}$,

$$V \in E_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{array} \right. \iff x = 0, y = 0$$

E_2 est donc une droite vectorielle, dont le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ est une base.
Les dimensions des sous-espaces propres sont égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes, la matrice A est donc diagonalisable. Dans la base (e_1, e_2, e_3) l'endomorphisme représenté par A (dans la base canonique) a pour matrice.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P^{-1}AP = D$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorisons le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (1-X) = (1-X)((1-X)^2+1) = (1-X)(X^2-2X+2)$$

factorisons maintenant le polynôme $X^2 - 2X + 2$, le discriminant réduit $\Delta' = 1 - 2 = -1$, ce polynôme n'admet donc pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées qui sont : $1+i$ et $1-i$. On a $P_A(X) = (1-X)(1-i-X)(1+i-X)$.
La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'a pas toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car c'est une matrice 3×3 qui admet trois valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrons que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - c^2) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 \\ &= (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a - d = 0$ et $c = 0$, mais, si $c = 0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 11 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 12 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 13 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 14 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 15 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 16 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 17 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 18 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 19 ▲

cf. correction manuscrite.

Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Organisation de ce cours

Ce cours est composé de 6 séances de 2 heures.

Auteurs de ces notes de cours

Cours et exercices rédigés par Antoine Géré.
Exercices rédigés par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).